Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 176

Heft 2

Ausgegeben am 8. Dezember 1936

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 35 und Leipzig

1936

Band 176. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Peschl, E., Zur Theorie der schlichten Funktionen	61
Haupt, Otto, Zur Differentialgeometrie k-dimensionaler Gebilde im R_n	95
Berichtigung zur Arbeit O. Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung	112
Franz, Wolfgang, Torsionsideale, Torsionsklassen und Torsion	113

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Zur Theorie der schlichten Funktionen.*)

Von *E. Peschl* in Jena.

Einleitung.

Die Theorie der schlichten Funktionen ist vom Anfang ihrer Entwicklung an mit der klassischen Funktionentheorie eng verknüpft. So hat vor allem der Koebesche Verzerrungssatz am Anfang dieser Theorie gestanden und gleichzeitig der Theorie der konformen Abbildungen wie der Uniformisierung von analytischen Funktionen gedient. Inzwischen hat sich eine umfangreiche Literatur über die schlichten Funktionen entwickelt. Die vollständige Entwicklung dieser Theorie zu geben, würde hier zu weit führen. Es ist jedoch interessant, sich einmal zu überlegen, welche grundlegenden Ideen und Gesichtspunkte sowie Hauptprobleme in dieser Theorie zutage traten. Denn dies macht gerade die Theorie der schlichten Funktionen so reizvoll, daß im Laufe der Zeit von den verschiedensten Seiten her die Bemühungen angesetzt werden mußten, um dem Wesen der Schlichtheit in ihren Hauptproblemen näher zu kommen. Ausgehend vom Koebeschen Verzerrungssatz ergaben sich zunächst der Flächensatz von Bieberbach und die daran anschließenden Folgerungen. Nachdem schon vorher in einer Reihe von Arbeiten von Carathéodory, Toeplitz und anderen das Koeffizientenproblem der beschränkten wie auch der Funktionen von positivem Realteil aufgeworfen und gelöst wurde, hat sich dann vor allem Bieberbach für die schlichten Funktionen das entsprechende Problem gestellt und in mehreren Arbeiten behandelt. Die Schwierigkeiten dieses bis heute noch ungelösten Problems traten erst allmählich im Laufe der Entwicklung in Erscheinung. Soviel auch der Flächensatz zunächst für die Theorie der schlichten Funktionen leistet, so charakterisiert er doch nicht die Schlichtheit, da er auch für gewisse nichtschlichte Funktionen gilt. Eine Weiterentwicklung dieses Gedankens gab aber Prawitz, der an Stelle des Flächenintegrals Integrale mit gewissen Belegungen setzt. Man könnte hier die Hoffnung hegen, die Schlichtheit damit charakterisieren zu können. Wenn dies auch zweifellos zutrifft und die Arbeit von Prawitz eine Reihe von schönen Sätzen enthält, die sehr wenig bekannt sind, so kam doch für das eigentliche Problem der Koeffizienten der schlichten Funktionen in der nächsten Zeit die wesentlichste Förderung von einer Arbeit von Löwner. Man könnte, wenn man die Mittel aufzählen wollte, die geeignet sind, die Schlichtheit zu erfassen, auch noch das Koebesche Bildgebiet nennen, doch kommt man damit nicht recht weiter. Im folgenden wird *die Iteration als eine Grundeigenschaft für die schlichten Funktionen* ausgenutzt. Es war vor allem das Hauptziel der Arbeit, *allgemeine Zusammenhänge in dieser Richtung* aufzudecken und vielleicht gerade dadurch zu zeigen, welcher Art die Schwierigkeiten sind, vor allem auch, mit welchen analytischen Schwierigkeiten das Problem verknüpft ist.

*) Diese Arbeit hat der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena als Habilitationsschrift vorgelegen. Habilitationskolloquium 17. 4. 1935.

Es gibt noch eine ganze Reihe anderer Hauptprobleme der Theorie der schlichten Abbildungen. Am nächsten berührt sich mit dem eigentlichen Problem der Koeffizienten noch die Frage nach asymptotisch möglichst guten Abschätzungen, ja sie ist praktisch aufs engste mit dem Koeffizientenproblem verbunden. Dem gegenüber kann man allerdings sagen, daß man noch eine ganze Reihe von vorhandenen Methoden vielleicht ausnützen könnte, um diese oder jene Abschätzung zu verbessern, ohne daß man dabei dem eigentlichen Koeffizientenproblem, das uns hier in erster Linie interessiert, näher kommt, d. h. der Frage nach den genauen Koeffizientenbereichen. Daher sind diese verschiedenen Ergebnisse hier beiseite gelassen, so wichtig und wertvoll sie in der Theorie sind.

Ein anderer Teil der Untersuchungen beschäftigt sich mit der Frage, wie sich Schlichtheit und andere Eigenschaften analytischer Funktionen gegenseitig bedingen oder einschränken. Dieses sehr weite und reizvolle Gebiet hat eine große Reihe schöner Ergebnisse, wie etwa die Untersuchungen über den Rundungsradius oder die Sternigkeitsschranke der schlichten Funktionen oder die Schlichtheitsschranke beschränkter Funktionen zu verzeichnen. Andere Autoren haben sich dem Problem der Schlichtheit der Potenzreihenabschnitte zugewandt. Es sei hier für die Übersicht über solche Fragen generell auf die in letzter Zeit erschienenen Darstellungen verwiesen [1]).

Im Koeffizientenproblem erbrachten in allerletzter Zeit Dieudonné und Rogosinski einen weiteren Fortschritt, indem sie zeigten, daß die Bieberbachsche Vermutung für Funktionen mit reellen Koeffizienten richtig ist.

Ich habe mir zur Aufgabe gestellt, das Gesamtproblem von neuen Seiten aus zu sehen. Dabei haben zum Teil die einzelnen Kapitel der folgenden Arbeit voneinander unabhängige Ausgangspunkte, sind also in logischer Hinsicht keineswegs alle voneinander abhängig. (So könnte z. B. die Differentialgleichung für den Rand der Bereiche schon im Kapitel II hergeleitet werden; trotzdem haben wir sie, um die sich daran anschließenden Überlegungen nicht zu unterbrechen, später gebracht.) Zunächst steht der *Approximationssatz* des ersten Kapitels im Vordergrund. Er besagt, daß man die *elementaren Schlitzabbildungen* nur unter sich zu iterieren braucht, um mit allen so entstehenden Funktionen bereits alle schlichten Funktionen approximieren zu können. Zwar stehen zunächst dem Iterationskalkül beträchtliche analytische Schwierigkeiten entgegen. Daher kann es der Sinn des Approximationssatzes nur sein, den Schritt ins Infinitesimale an eine andere Stelle zu verlegen. Dies geschieht im zweiten Kapitel, in dem vom Gesamtverlauf der *Iterationskurven* der Schritt zur *Randeigenschaft* der Bereiche gemacht wird. Im dritten Kapitel *iterieren wir mit beliebigen sternförmig beschränkten Abbildungen der Form*

$$S^{-1}(e^{-t}S(z)), \quad t > 0,$$

worin $S(z)$ eine beliebige sternförmige Funktion ist, und betrachten die zugehörigen Iterationsrichtungen im Koeffizientenraum. Dabei zeigt sich, daß die Iterationsrichtungen im transformierten Koeffizientenraum $\widetilde{\mathfrak{R}}$ von $\frac{f(z)}{f'(z)}$ eine gewisse Symmetrie aufweisen, welche die Behandlung des Problems erleichtern dürfte. Wir gewinnen in diesem Kapitel den *Hauptsatz* 10:

Der genaue n-te Variabilitätsbereich $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ der Koeffizienten der im Einheitskreis regulären und schlichten Funktionen ist der kleinste den Bereich $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ der Koeffizienten

---

[1]) Siehe das Literaturverzeichnis am Schlusse der Arbeit. Die Arbeiten dieses Verzeichnisses werden im folgenden mit L. V. und der Angabe ihrer Nummer zitiert.

der sternförmigen Funktionen enthaltende Bereich mit der Randeigenschaft, daß kein beliebig kleines Anfangskurvenstück des jedem Randpunkt $P = (\beta)$ zugeordneten Iterationskurvenbüschels $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ mit beliebig in $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ variierendem Endpunkt (σ) ins Äußere dringt [2]).

In den anschließenden §§ 17, 18 stellen wir die *partielle Differentialgleichung* (allerdings in Parameterform) auf, *welcher jeder differentiierbare Teil des Randes von* $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ *genügen muß.* Die Elimination dieses Parameters ist im allgemeinen schwierig. Das Problem, die genauen Bereiche $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ aufzufinden, ist damit auf die Aufgabe zurückgeführt, diese partielle Differentialgleichung (17. 2) mit oder ohne Elimination des Parameters zu integrieren und dann für die erhaltenen Bereiche die im Hauptsatz 10 genannten Haupteigenschaften der Iterationsfestigkeit hinterher nochmals zu überprüfen.

Von hier aus wird im vierten Kapitel wieder der Schritt zurück ins Infinitesimale gemacht und zwar an derselben Stelle, an der ihn auch Löwner macht, nur werden noch wesentlich allgemeinere infinitesimale Iterationen dabei verwendet, welche aus mehrfachen Radialschlitzabbildungen entstehen. Die Integration der zu diesen mehrfachen Gabelschlitzabbildungen gehörigen Differentialgleichungen, die eine Verallgemeinerung der Löwnerschen Differentialgleichung darstellt, verläuft parallel mit der bekannten Integration bei Löwner, wie auch mit gewissen Entwicklungen der Kapitel II und III. Das Wesentliche ist, daß man bei dieser und ähnlich gebauten anderen Differentialgleichungen (vgl. § 32), welche auf infinitesimalen Iterationen beruhen, jeweils für die Lösungen die *Schlichtheit* auf Grund allgemeiner Approximationssätze *beweisen* kann, sobald nur die in den Anfangsbedingungen auftretende Funktion selbst *schlicht* ist.

Das fünfte Kapitel liefert den genauen reellen Variabilitätsbereich $\mathfrak{E}_s^{(3)}$, d. h. den Durchschnitt des Bereiches $\mathfrak{B}_s^{(3)}$ mit $\Im\beta_2 = \Im\beta_3 = 0$; $\mathfrak{E}_s^{(3)}$ ergibt sich, indem man in der Ebene der Koordinaten $\Re\beta_2$, $\Re\beta_3$ die reellen Iterationen unter Zuhilfenahme des reellen Bereichs $\mathfrak{E}_*^{(3)}$ für die sternförmigen Funktionen betrachtet, aus einer Differentialgleichung (27. 2). Wir erhalten hier das *Ergebnis*:

Für jede im Einheitskreis reguläre und schlichte Funktion $f(z) = z + b_2 z^2 + \cdots$ *gilt die scharfe Abschätzung*

$$1 \geqq \Re\beta_3 \geqq 2\Phi(\Re\beta_2) - 1.$$

Darin ist $\beta_2 = -\frac{b_2}{2}$, $\beta_3 = b_2^2 - b_3$ *und außerdem* $\Phi(x)$ *durch die Gleichungen*

$$\Phi(x) = \frac{x^2}{\varphi^2(x)}(2\varphi(x) - 1) \quad \textit{und} \quad x = \varphi e^{1-\varphi}$$

erklärt.

Aus diesem Ergebnis folgt, daß die Berandung von $\mathfrak{B}_s^{(3)}$ *keine algebraische Fläche* sein kann [3]), weiterhin leitet sich eine Ungleichung von Fekete und Szegö nunmehr völlig elementar und mühelos aus dieser genauen Abschätzung her. Sodann bringen wir noch eine Abschätzung des Bereiches $\mathfrak{B}_s^{(3)}$ von innen heraus, zeigen jedoch, daß diese noch nicht den genauen Bereich ergibt. Und schließlich stellen wir die genauen *Schrankenfunktionen* auf, welche zum Rand von $\mathfrak{E}_s^{(3)}$ gehören. Es lassen sich hier zweifellos in vieler Hinsicht diese Gedanken weiterführen. Doch sei dies anderen Arbeiten vorbehalten.

---

[2]) Genaueres siehe Nr. **15**.

[3]) Vgl. die Fußnote [31]).

I. Der Approximationssatz.

1. *Der Hauptsatz der Approximation.* Wir wollen zunächst eine besonders einfache schlichte Abbildung des Einheitskreises betrachten, nämlich die, welche das Innere des Einheitskreises auf ein Teilgebiet schlicht abbildet, das aus diesem dadurch entsteht, daß wir von dem Punkte $\overline{\eta}$ der Peripherie aus längs des Radiusvektors ein Stück weit nach innen aufschneiden. Ein solches Gebiet heiße ein *elementares* Schlitzgebiet. Und die Funktion $f(z)$, welche dieses auf den Einheitskreis der z-Ebene normiert abbildet, nennen wir eine *elementare beschränkte* Schlitzabbildung. Dabei heiße hier und auch später eine Funktion normiert, wenn für sie $f(0) = 0$, $f'(0)$ reell und positiv ist. In eine solche Funktion gehen also zwei reelle Parameter t, ϑ ein mit

$$f'(0) = e^{-t}, \quad \eta = e^{i\vartheta} \qquad (0 \leqq t,\ 0 \leqq \vartheta < 2\pi).$$

Die Familie dieser Funktionen $f_{(\vartheta,t)}$ mit beliebigen reellen Werten t, ϑ $(0 \leqq t, 0 \leqq \vartheta < 2\pi)$ sei zur Abkürzung $\mathfrak{F}_1$ genannt.

Für $\vartheta = 0$ erhalten wir die Abbildungsfunktion $f_{(\vartheta,t)}$ aus der Gleichung

$$\frac{w}{(1+w)^2} = \alpha \frac{z}{(1+z)^2} \quad \text{mit } \alpha = e^{-t}. \tag{1.1}$$

Allgemein ist $f_{(\vartheta,t)} = \overline{\eta} f_{(\alpha,t)}(\eta z)$, d. h. $w = f_{(\vartheta,t)}$ genügt der Gleichung

$$\frac{w}{(1+\eta w)^2} = \alpha \frac{z}{(1+\eta z)^2} \quad \text{mit } \alpha = e^{-t},\ \eta = e^{i\vartheta}.$$

Nun bilden wir die *Iterierten* von diesen. Sind $f_1, \ldots, f_n$ irgendwelche Funktionen aus der Familie $\mathfrak{F}_1$, so möge die Gesamtheit aller solcher durch Iteration zusammengesetzten elementaren beschränkten Schlitzabbildungen $f_1(f_2(\ldots(f_n(z))\ldots)$ die Familie $\mathfrak{F}_n$ heißen. Wir werden diese Funktionen auch kurz *n-te Elementariterierte* bezeichnen. Der Hauptinhalt unseres ersten Satzes besagt nun, daß diese Funktionen schon ausreichen, um jede beschränkte schlichte Abbildung zu approximieren. Wir beweisen

Satz 1 (Approximationssatz). *Für jede (normierte) beschränkte und den Einheitskreis schlicht abbildende Funktion $f(z)$ gibt es eine Folge von Funktionen φ_n aus $\mathfrak{F}_n$, welche in jedem Kreis $|z| \leqq \varrho$, $0 < \varrho < 1$, ϱ beliebig* — wir wollen dafür kurz sagen: *im Innern* des Einheitskreises — *gleichmäßig gegen die vorgelegte Funktion $f(z)$ konvergiert.*

Beweis. Alle Funktionen seien im folgenden normiert. Die Funktionen $g_n = f(\varrho_n z)$ mit $\varrho_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n = 2, \ldots$, bilden den Einkeitskreis auf Gebiete ab, welche durchweg regulär analytisch berandet sind und mit ihren Randpunkten in $|z| < 1$ liegen, und konvergieren *im Innern* gleichmäßig gegen $f(z)$. Daher genügt es für das weitere, das Gebiet G regulär analytisch berandet und $\overline{G}$[4a]) in $|z| < 1$ vorauszusetzen. Denn haben wir $g_n(z)$ durch die Folge $f_{n,k}(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, approximiert, so können wir hieraus eine geeignete Diagonalfolge finden, welche auch $f(z)$ approximiert. Jede solche Abbildung aber kann, wie dies Löwner[4]) schon gezeigt hat, durch eine Folge von beschränkten Schlitzabbildungen approximiert werden, dergestalt, daß man von einem Punkt P der Peripherie des Einheitskreises der w-Ebene bis zu einem Randpunkt P^* des Gebietes einen sonst den Rand des Gebietes vermeidenden Jordan-Kurvenschnitt (in $|z| < 1$) führt und dann längs des Randes zu diesem Punkte P^* zurückschneidet. Ist P_n eine

[4a]) $\overline{G}$ bedeute das abgeschlossene Gebiet G.

[4]) L. V. (8), S. 106.

Punktfolge auf dem Rande des Gebietes mit $P_n \to P^*$ und zwar so, daß die Punkte P_n beim Aufschneiden des Schlitzes monoton aufeinander folgen, so nehmen wir aus dem Einheitskreis den Schlitz $\mathfrak{J}_n$ von P bis P_n heraus; das entstehende Restgebiet G_n werde durch $\psi_n(z)$ normiert auf den Einheitskreis abgebildet. Dann konvergieren aber die $\psi_n(z)$ nach einem allgemein bekannten Satz von Carathéodory im Innern des Einheitskreises gleichmäßig gegen $f(z)$ (und offenbar kann der Schlitz $\mathfrak{J}_n$ dabei als eine beliebig oft differentiierbare Kurve angenommen werden).

2. Nun können wir aber unseren Beweis rasch zu Ende führen, wenn wir folgenden Hauptsatz von Löwner[5]) zu Hilfe nehmen:

Satz 2 (Löwner). *Zu jeder beschränkten (normierten) Schlitzabbildung*

$$f(z) = e^{-t_0}(z + \cdots)$$

läßt sich eine stetige Funktion $\varkappa(t)$ mit $0 \leqq t \leqq t_0$ und $|\varkappa| = 1$ so finden, daß mit ihrer Hilfe die Funktion als Integral $f(z) = f(z, t_0)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -f(z,t)\,\frac{1 + \varkappa(t)\,f(z,t)}{1 - \varkappa(t)\,f(z,t)} \tag{2.1}$$

mit der Anfangsbedingung $f(z, 0) = z$ durch Integration gewonnen werden kann.

Haben wir nämlich für unsere Funktion $f(z)$, welche den Einheitskreis auf ein beschränktes Schlitzgebiet (der oben beschriebenen Art) abbildet, die nach dem Satz von Löwner existierende stetige Funktion $\varkappa(t)$ gefunden, so wählen wir nun zum Zwecke der weiteren Approximation eine Treppenfunktion, welche stückweise konstant ist:

$$\varkappa^{(n)}(t) = \varkappa_\lambda^{(n)} (= \text{konst.}) \quad \text{für} \quad \frac{\lambda t_0}{n} \leqq t \leqq \frac{(\lambda+1)\,t_0}{n}, \quad \lambda = 0, \ldots, n-1,$$

und zwar so, daß

$$|\varkappa - \varkappa^{(n)}(t)| < \varepsilon_n \quad \text{für alle} \quad 0 \leqq t \leqq t_0 \qquad (\varepsilon_n \to 0).$$

Dann ist aber die Funktion $f^{(n)}(z, t_0) = e^{-t_0}(z + \cdots)$, die wir als Lösung von (2.1) (mit der Anfangsbedingung $f^{(n)}(z, 0) = z$) erhalten, wenn wir die Funktion $\varkappa(t)$ durch $\varkappa^{(n)}(t)$ ersetzen, genau von der Form einer n-ten Elementariterierten aus der Familie $\mathfrak{F}_n$, da für jede Funktion aus $\mathfrak{F}_1$ die Gleichung (2.1) bei konstantem $\varkappa(t)$ besteht und auch bei der Zusammensetzung der Funktionen die Differentialgleichung (2.1) erhalten bleibt. Da aber die Koeffizienten der Entwicklung von $f(z) = e^{-t_0}(z + b_2 z^2 + \cdots)$, wie man bei Löwner[6]) nachliest, durch fortgesetzte Integration aus $\varkappa(t)$ schrittweise gewonnen werden können, und, wie man dabei sieht, *stetige Funktionale* von $\varkappa(t)$ sind, so können wir für jedes m und $\varepsilon^* > 0$ ein $n_0 = n_0(m, \varepsilon^*)$ so finden, daß

$$|b_\mu - b_\mu^{(n)}| \leqq \varepsilon^* \quad \text{ist für alle} \quad n \geqq n_0, \ \mu \leqq m. \tag{2.2}$$

Die Funktionen $f^{(n)}(z, t_0) = e^{-t_0}(z + b_2^{(n)} z^2 + \cdots)$ bilden aber im Einheitskreis eine normale Folge, und es existiert daher zumindest eine *im Innern* des Einheitskreises gleichmäßig konvergente Teilfolge $f^{(n_\nu)}(z, t_0)$, welche dann wegen (2.2) gegen die Funktion $f(z, t_0)$ konvergiert.

Damit haben wir den Beweis für Hauptsatz 1 zu Ende geführt. Es erscheint wünschenswert, Hauptsatz 1 direkt zu beweisen, ohne auf das Ergebnis von Löwner Bezug zu nehmen. Doch sei im Rahmen dieser Arbeit nicht darauf eingegangen.

3. *Iterationsfestigkeit.* Um beliebige (nicht notwendig beschränkte) schlichte Abbildungen (welche wir wieder normiert annehmen) zu approximieren, erinnern wir

---

[5]) L. V. (8), S. 117.
[6]) L. V. (8), S. 118.

uns, daß es offenbar wiederum genügt, analytisch berandete und daher beschränkte Gebiete zu approximieren und solche durch eine geeignete Ähnlichkeitstransformation $w^* = \varrho w$ in das Innere des Einheitskreises zu bringen; so haben wir den Satz:

Satz 3. *Für jede den Einheitskreis schlicht abbildende Funktion $f(z)$ gibt es eine Folge von Elementariterierten $\Phi^{(n)} = \varrho_{(n)} g^{(n)}(z)$ mit $g^{(n)}(z) = f_1(\ldots f_n(z))$ aus der früher gekennzeichneten Familie $\mathfrak{F}_n$, welche im Innern des Einheitskreises gleichmäßig gegen die Funktion $f(z)$ konvergieren.*

Wollen wir also eine Eigenschaft als allen im Einheitskreis schlichten Funktionen zukommend erweisen, so reicht dazu nach diesem Satze z. B. hin, zu beweisen:

1. Sie kommt der identischen Abbildung $w = z$ zu.
2. Wenn die Eigenschaft einer Funktion $F(z)$ zukommt, dann auch a) der Funktion $\varrho F(z)$ mit beliebigem $\varrho > 0$, sowie b) der mit einer beliebigen elementaren Schlitzabbildung Iterierten $F(f_{(\vartheta,t)}(z))$ (und zwar genügt es hier, für beliebig kleine Werte von t den Beweis zu führen).
3. Wenn die Eigenschaft allen Funktionen einer im Innern gleichmäßig konvergenten Folge zukommt, dann auch der Grenzfunktion. (Diese dritte Eigenschaft ist bei allen Koeffizientenabschätzungen trivialerweise von selbst erfüllt.)

Um diesen Satz für Koeffizientenabschätzungen auszuwerten, gilt es also vor allem, Abschätzungen und Ungleichungen zu finden, die die Eigenschaft 2 b) besitzen, die wir kurz *Iterationsfestigkeit* nennen wollen.

Als Beispiel hierfür beweisen wir die für jede schlichte Funktion

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

seit langem bekannten Ungleichungen:

$$|a_2| \leqq 2, \quad |a_3 - a_2^2| \leqq 1 \ ^{7}).$$

Dazu genügt es lediglich, da sie für die Abbildung $w = z$ sicher gelten und auch die Eigenschaft 2 a) erfüllen[7a]), ihre Iterationsfestigkeit zu zeigen.

Wir setzen:

$$f_{(\vartheta,t)}(z) = \alpha(z + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \cdots), \quad \alpha = e^{-t}.$$

Dabei ist

$$s_2 = 2\eta(1-\alpha), \quad s_2^2 - s_3 = \eta^2(1-\alpha^2), \quad \eta = e^{i\vartheta},$$

und somit erhalten wir

$$F(f_{(\vartheta,t)}(z)) = \alpha(z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots)$$

mit den Koeffizienten

$$A_2 = s_2 + a_2\alpha, \quad A_3 = s_3 + 2a_2\alpha s_2 + a_3\alpha^2,$$
$$A_2^2 - A_3 = (s_2^2 - s_3) + \alpha^2(a_2^2 - a_3).$$

Nehmen wir also nun etwa für die Funktion $F(z)$ die Ungleichungen

$$|a_2| \leqq 2, \quad |a_2^2 - a_3| \leqq 1$$

als richtig an, so erhalten wir für die Koeffizienten der Iterierten:

$$|A_2| = |2\eta(1-\alpha) + a_2\alpha| \leqq 2(1-\alpha) + |a_2|\,\alpha \leqq 2(1-\alpha) + 2\alpha = 2,$$
$$|A_2^2 - A_3| = |\eta^2(1-\alpha^2) + \alpha^2(a_2^2 - a_3)| \leqq 1 - \alpha^2 + \alpha^2 = 1,$$

womit alles gezeigt ist.

---

[7]) Vgl. L. V. (2), (25), (8), (13) u. a.

[7a]) — in nicht normierter Form ist in den Ungleichungen a_ν durch $\frac{a_\nu}{a_1}$ zu ersetzen —

Umgekehrt braucht aber eine für jede schlichte Funktion gültige Abschätzung noch keineswegs iterationsfest zu sein. Beispielsweise ist die Ungleichung $|a_3| \leqq 3$ nicht iterationsfest, d. h. es gibt Funktionen $F(z)$ mit $|a_3| \leqq 3$, für die die Iteration $F(f_{(\vartheta,t)}(z)) = \alpha(z + A_2 z^2 + \cdots)$ einen Koeffizienten A_3 mit $|A_3| > 3$ liefert. (Die Funktion $F(z)$ ist dann nicht mehr schlicht.)

Wir werden im folgenden sehen, wie sich unser Satz weiter fruchtbar verwenden läßt, um neue Abschätzungen zu erhalten.

II. Das Koeffizientenproblem im allgemeinen.

4. *Die Koeffizientenbereiche und die Grundeigenschaft der Iterationskurven.* Jeder in $|z| < 1$ regulären Funktion $F(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ ordnen wir im Koeffizientenraum $a_2, a_3, \ldots$ einen Punkt zu, dessen Koordinatenfolge $(a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ ist. Und ebenso wird damit in jedem endlichen Teilraum $\mathfrak{R}^{2n-2}$ der Punkt mit den Koordinaten $(a_2, \ldots, a_n)$ der Funktion zugeordnet. Wie sieht nun der genaue Bereich im Koeffizientenraume aus, der alle und nur solche Punkte in seinem Innern oder auf dem Rande [8]) enthält, welche einer schlichten Funktion $F(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ zugeordnet sind? Genauer: Wir suchen für jedes $n \geqq 2$ einen (abgeschlossenen) Bereich $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ im Raum der Koordinaten $(a_2, \ldots, a_n)$ von der Eigenschaft, daß erstens für jede schlichte Funktion die Koeffizienten $a_2, \ldots, a_n$ im Bereich $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ liegen und daß es zweitens zu jedem System von $(a_2, \ldots, a_n)$ aus dem Bereich $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ eine Folge $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ derart gibt, daß die Funktion $z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$ im Einheitskreis regulär und schlicht ist. Dann wollen wir also $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ den *genauen n-ten Variabilitätsbereich der schlichten Funktion* nennen.

Betrachten wir nun die Iteration im Koeffizientenraum etwas genauer. Halten wir die Zahl $\eta = e^{i\vartheta}$ (ϑ reell) zunächst einmal fest, während t beliebig positive Werte durchlaufe. Den iterierten Funktionen

$$F_t = \frac{1}{\alpha} F(f_{(\vartheta,t)}(t)) = z + A_2 z^2 + \cdots \quad (\alpha = e^{-t})$$

entspricht dann bei variablem Parameter t im Koeffizientenraum die Kurve [8])

$$\mathfrak{C}_\eta(P) = (A_2(t),\ A_3(t), \ldots).$$

Ihr einer Endpunkt ist $P = (a_2, a_3, \ldots)$, ihr anderer ($t \to \infty$):

$$Q = (2\eta, 3\eta^2, 4\eta^3, \ldots, n\eta^{n-1}, \ldots), \quad \eta = e^{i\vartheta}.$$

Zunächst stellen wir fest, daß *jeder n-te Variabilitätsbereich der schlichten Funktionen auch wirklich iterationsfest ist.* In der Tat gibt es zu jedem Punkt $(a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})$ des Bereichs $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ eine in $|z| < 1$ reguläre und schlichte Funktion:

$$f^{(0)}(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu^{(0)} z^\nu.$$

Dann ist aber auch die durch Iteration gewonnene Funktion schlicht, und dann liegen also auch die Koeffizienten $A_2^{(0)}(t), \ldots, A_n^{(0)}(t)$, $t > 0$, wieder in diesem Bereich. D. h. also, für diese besonderen Bereiche ist die oben formulierte Eigenschaft 2 b), wie auch 1), 2 a) und 3), notwendig erfüllt.

---

[8]) Wenn wir im folgenden gelegentlich von einer stetigen Kurve oder von Randpunkten eines Bereiches im Raum der unendlich vielen Veränderlichen $a_2, a_3, \ldots$ der Kürze halber sprechen, so meinen wir damit immer nur für jedes *endliche* $n (\geqq 2)$ die betreffende *Projektion* dieser Kurve oder dieses Randpunktes in den Teilraum $(a_2, \ldots, a_n)$, nur daß dann die Betrachtung für *jedes* $n \geqq 2$ gilt.

5. Umgekehrt können wir schließen:

Satz 4. *Hat ein Bereich im Koeffizientenraum* $(a_2, \ldots, a_n)$, *der den Nullpunkt enthält* (siehe Eigenschaft 1)), *die Eigenschaft, daß die von jedem Randpunkt* P *ausgehende Kurve* $\mathfrak{C}_\eta(P)$ *für jedes* η, $|\eta| = 1$, *wenigstens ein Stück weit nirgends ins Äußere dringt, so enthält er den genauen Koeffizientenbereich* $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ *der schlichten Funktionen.*

Daß man dabei nur noch von den Randpunkten dieses Bereiches und in diesen nur noch von einem beliebig kleinen Anfangsstück der Iterationskurven zu reden braucht, ist bereits ein wichtiger Schluß. Dies zeigt sich so. Ein solcher Bereich enthält dann nämlich die von jedem inneren oder Randpunkt P ausgehende zugehörige Kurve $\mathfrak{C}_\eta(P)$ *in ihrer ganzen Ausdehnung* (und damit auch deren Endpunkt $Q = (2\eta, 3\eta^2, 4\eta^3, \ldots)$ für jedes $|\eta| = 1$, d. h. auch die Kurve $(2e^{i\vartheta}, 3e^{2i\vartheta}, \ldots)$, $0 \leqq \vartheta < 2\pi$). Nehmen wir nämlich an, daß die Kurve $\mathfrak{C}_\eta(P)$ irgendwo in das Äußere des Bereiches dringe, so können wir eine Stelle P' auf ihr finden mit kleinstmöglichem Parameterwert t', wo sie für beliebig benachbarte Werte ins Äußere dringt. Nun aber ist *die diesem Punkt* P' *zugeordnete Kurve* $\mathfrak{C}_\eta(P')$ *mit demselben* η *genau das restliche Stück der Kurve* $\mathfrak{C}_\eta(P)$, *die dem Punkte* P *zugeordnet war*, nur mit der Parameteränderung $\tau = t - t'$, denn es ist:

$$F(f_{(\vartheta,t)}(f_{(\vartheta,\tau)}(z))) = F(f_{(\vartheta,t'+\tau)}(z)). \tag{5.1}$$

Diese Kurve dringt aber nach Voraussetzung über die Randeigenschaft unseres Bereiches in einer genügend kleinen Umgebung von P' sicher nicht ins Äußere, womit wir einen Widerspruch haben.

6. *Die Iterationsrichtungen und notwendige Kriterien.* Betrachten wir den Tangentenvektor an die Kurve $\mathfrak{C}_\eta(P)$ im Ausgangspunkt P. Er ist: $\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} A_2\right)_{t=0}, \left(\frac{\partial}{\partial t} A_3\right)_{t=0}, \ldots\right)$. Diese Komponenten können wir aber leicht berechnen, es ist $(A_1 = 1)$:

$$\sum_1^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} A_\nu(t)\right)_{t=0} z^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(e^t F(f_{(\vartheta,t)}(z))\right)\right)_{t=0} = \left(F(f) + e^t F'(f)\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=0}$$

$$= F(z) - F'(z)\, z \frac{1+\eta z}{1-\eta z}.$$

Wir erhalten:

$$B_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial t} A_\nu\right)_{t=0} = (1-\nu)\, a_\nu - 2\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \varkappa a_\varkappa \eta^{\nu-\varkappa} \qquad (a_1 = 1).$$

Die Tangente $\mathfrak{T}_\eta(P)$ im Punkte P an die Kurve $\mathfrak{C}_\eta(P)$ hat dann die Parameterdarstellung

$$A_\nu^* = a_\nu + tB_\nu = a_\nu(1 - (\nu-1)\, t) + (\nu-1)\, t b_\nu, \qquad \nu \geqq 2,$$

worin

$$b_\nu = -\frac{2}{\nu-1}\left((\nu-1)\, a_{\nu-1}\eta + (\nu-2)\, a_{\nu-2}\eta^2 + \cdots + 2a_2\eta^{\nu-2} + \eta^{\nu-1}\right)$$

ist.

(Es ist auch nützlich, gelegentlich die folgende Kurve zu betrachten, welche den Punkt $(a_2, \ldots, a_n)$ mit $(b_1, \ldots, b_n)$ verbindet und im Punkte $P = (a_2, \ldots, a_n)$ dieselbe Tangentenrichtung wie unsere Kurve $\mathfrak{C}_\eta(P)$ aufweist:

$$A_\nu^* = a_\nu e^{-(\nu-1)t} + b_\nu(1 - e^{-(\nu-1)t}), \quad 0 < t < \infty.)$$

Als *notwendiges Kriterium* erhalten wir somit die Bedingung, daß in jedem Randpunkt unseres Koeffizientenbereiches jede Richtung des zweidimensionalen (Richtungs-)

Kegels

$$\mathfrak{K}^2(P) = (tB_\nu),\quad t > 0,\quad \eta = e^{i\vartheta}$$

ins Innere weist oder höchstens die Randfläche tangiert [9]).

7. *Die beschränkten schlichten Funktionen.* Sei $s(z) = \alpha(z + a_2 z^2 + \cdots)$ eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion, welche dort schlicht und beschränkt (d. h. ihrem absoluten Betrag nach kleiner als 1) ist, und es sei wiederum α reell positiv normiert, also $0 < \alpha \leqq 1$. Alle Punkte $(\alpha, a_2, \ldots, a_n)$, zu denen es eine in $|z| < 1$ reguläre schlichte und beschränkte Funktion $s(z) = \alpha(z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots)$ gibt, bilden eine gewisse Punktmenge $\mathfrak{B}_{sb}^{(n)}$ im Raum dieser Koordinaten. Ihre Teilmenge für $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha \leqq 1$, ist abgeschlossen; wir wollen diese Teilmenge, im Raum der $(a_2, \ldots, a_n)$ gedeutet, mit $\mathfrak{B}_{sb}^{(n)}(\alpha)$ bezeichnen. Das Koeffizientenproblem der schlichten beschränkten Funktionen besteht in der Bestimmung der $\mathfrak{B}_{sb}^{(n)}$, $n = 2, 3, \ldots$.

Bezeichnen wir die Menge aller Häufungspunkte der $\mathfrak{B}_{sb}^{(n)}(\alpha)$, n fest, für $\alpha \to 0 -$ im Raum der $(a_2, \ldots, a_n)$ gedeutet — mit $\mathfrak{B}_{sb}^{(n)}(0)$, so ist, wie man sofort erkennt,

$$\mathfrak{B}_{sb}^{(n)}(0) = \mathfrak{B}_{s}^{(n)},\quad n = 2, \ldots.$$

Einen weiteren Aufschluß über die Lage dieser $\mathfrak{B}_{sb}^{(n)}$ erhalten wir aus den folgenden zwei Sätzen.

Satz 5. *Zu jeder in $|z| < 1$ regulären schlichten beschränkten Funktion $s(z) = \alpha(z + a_2 z^2 + \cdots)$ gibt es eine (eindeutig bestimmte) in $|z| < 1$ reguläre schlichte Funktion $S(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots$ so, daß für alle $|z| < 1$ gilt:*

$$S(s(z)) = \alpha S(z). \tag{7.1}$$

Vorbemerkung. Diese Gleichung ist als *Schrödersche Funktionalgleichung* bekannt. Wir brauchen übrigens in diesem Satze α nicht als normiert vorauszusetzen, es sei also lediglich $0 < |\alpha| \leqq 1$.

Beweis. Ist $|\alpha| = 1$, so ist $s(z) = e^{i\vartheta_0} z$, $S(e^{i\vartheta_0} z) = e^{i\vartheta_0} S(z)$, d. h. $S(z) = z$, und der Satz trivialerweise richtig. Sei also $0 < |\alpha| < 1$, dann weiß man [10]), daß es genau eine in einem gewissen Kreis $|z| < \varrho$ reguläre Funktion $S(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots$ gibt, welche in $|z| < \varrho$ der Schröderschen Funktionalgleichung $s(z) = S^{-1}(\alpha S(z))$ genügt. (Ihre Koeffizienten $A_2, A_3, \ldots$ lassen sich übrigens rekurrent aus dieser Gleichung berechnen.) Bilden wir die in $|z| < 1$ regulären und schlichten Funktionen:

$$s_1(z) = \frac{1}{\alpha} s(z),\quad s_2(z) = \frac{1}{\alpha} s_1(s(z)) = \frac{1}{\alpha^2} s(s(z)), \ldots,$$

$$s_k(z) = \frac{1}{\alpha} s_{k-1}(s(z)),\quad k = 2, \ldots,$$

so ist nach dem Schwarzschen Lemma $|s(z)| < \varrho$ in $|z| < \varrho$, und daher hat man die in $|z| < \varrho$ gültige Darstellung:

$$s_k(z) = \frac{1}{\alpha^k} S^{-1}(\alpha^k S(z)),\quad k = 1, 2, \ldots.$$

Differenzieren wir nach z, so folgt:

$$s_k'(z) = S^{-1'}(\alpha^k S(z)) \cdot S'(z).$$

Hieraus erkennen wir, daß für jedes z in $|z| < \varrho$ die Folge der Funktionen $s_k'(z)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, gegen $S'(z)$ konvergiert und zwar gleichmäßig in $|z| \leqq \varrho'$ für

[9]) Vgl. hierzu Nr. 11.

[10]) L. V. (17a).

beliebiges $\varrho' < \varrho$. Hieraus folgt, daß die $s_k(z)$ in $|z| < \varrho'$ für jedes $\varrho' < \varrho$ gleichmäßig gegen die Funktion $S(z)$ konvergieren. Jede in $|z| < 1$ konvergente Teilfolge der (schlichten) Funktionen $s_k(z)$ konvergiert also in jedem Kreis $|z| \leqq r$ mit beliebigem $r < 1$ gleichmäßig gegen ein und dieselbe in $|z| < 1$ reguläre und schlichte Funktion $S^*(z)$, welche in $|z| < \varrho$ mit $S(z)$ übereinstimmt.

Weil aber die $s_k(z) = z + \cdots$ in $|z| < 1$ eine normale Familie bilden, so folgt hieraus: Die Folge $s_k(z)$ konvergiert in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z| < 1$ gleichmäßig gegen eine in $|z| < 1$ reguläre und schlichte Funktion $S^*(z)$, welche in $|z| < \varrho$ mit $S(z)$ übereinstimmt und deswegen die Gleichung $S^*(s(z)) - \alpha S^*(z) = 0$ in $|z| < \varrho$ und damit auch in $|z| < 1$ erfüllt. Damit ist der Satz 5 bewiesen.

8. Wie wir schon sagten, lassen sich die Koeffizienten von $S(z)$ der Reihe nach berechnen. Man erhält durch Koeffizientenvergleichung aus der Gleichung (7. 1):

$$(8.1)\qquad \begin{aligned} A_2 &= \frac{a_2}{1-\alpha}, \quad A_3 = \frac{a_3}{1-\alpha^2} + \frac{2\alpha a_2^2}{(1-\alpha^2)(1-\alpha)}, \\ A_4 &= \frac{a_4}{1-\alpha^3} + \frac{a_3 a_2 \alpha(2+5\alpha)}{(1-\alpha^3)(1-\alpha^2)} + \frac{a_2^3 \alpha(1+5\alpha^2)}{(1-\alpha^3)(1-\alpha^2)(1-\alpha)} \end{aligned}$$

usw., allgemein:

$$A_n = A_n(\alpha, a_2, \ldots, a_n).$$

Damit haben wir den

Satz 6. *Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}^{(n)}(\alpha)$ den Bereich im Raum der $(a_2, \ldots, a_n)$, der durch die Bedingung*

$$(A_2(\alpha, a_2),\ A_3(\alpha, a_2, a_3),\ \ldots,\ A_n(\alpha, a_2, \ldots, a_n)) \text{ in } \mathfrak{B}_s^{(n)}$$

definiert ist, so gilt

$$\boxed{\mathfrak{B}_{sb}^{(n)}(\alpha) \leqq \mathfrak{A}^{(n)}(\alpha)}.$$

Für $n = 2$ folgt hiernach aus $|A_2| \leqq 2$, daß $|a_2| \leqq 2(1-\alpha)$ ist für jede in $|z| < 1$ reguläre beschränkte schlichte Funktion $\alpha(z + a_2 z^2 + \cdots)$. Da die elementaren Schlitzabbildungen hierin für jedes α das Gleichheitszeichen liefern, so gilt: $\mathfrak{B}_{sb}^{(2)}(\alpha) = \mathfrak{A}^{(2)}(\alpha)$, d. h. der *genaue* Bereich $\mathfrak{B}_{sb}^{(2)}$ ist $|a_2| \leqq 2(1-\alpha)$, ein seit langem bekanntes, von Pick und Löwner gefundenes Ergebnis. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß die Bereiche $\mathfrak{B}_{sb}^{(n)}(\alpha)$ und $\mathfrak{A}^{(n)}(\alpha)$ für $n > 2$, z. B. für $n = 3$, noch übereinstimmen, doch bleibt dies vorläufig noch unentschieden.

III. Zusammenhang mit dem Problem der Koeffizienten einer sternförmigen Funktion.

9. *Grundeigenschaft gewisser sternförmig beschränkter Funktionen.* Die Eigenschaft (5. 1) ist direkt zu ersehen aus der für jede elementare Schlitzabbildung $w = f_{(\vartheta,t)}(z)$ bestehenden Beziehung:

$$(9.1)\qquad \frac{w}{(1+\eta w)^2} = e^{-t}\frac{z}{(1+\eta z)^2}, \qquad \eta = e^{i\vartheta}, \qquad \vartheta \text{ reell}.$$

Schreiben wir $G_\eta(z) = \dfrac{z}{(1+\eta z)^2}$, so ist also $f_{(\vartheta,t)}(z) = G_\eta^{-1}(e^{-t} G_\eta(z))$ und daher

$$f_{(\vartheta,t_1)}(f_{(\vartheta,t_2)}(z)) = G_\eta^{-1}(e^{-t_1} G_\eta(G_\eta^{-1} e^{-t_2} G_\eta(z))) = G_\eta^{-1}(e^{-(t_1+t_2)} G_\eta(z)) = f_{\vartheta,t_1+t_2}(z).$$

Die Eigenschaft kommt also, wie man hieraus ersieht, auf jeden Fall solchen Funktionen zu, welche in der Form

$$(9.2)\qquad g(z) = G^{-1}(e^{-t} G(z))$$

darstellbar sind, worin $G(z)$ eine im Einheitskreis reguläre Funktion bedeutet.

Benützen wir zur Iteration eine beliebige schlichte beschränkte Funktion $s(z) = e^{-t}(z + a_2 z^2 + \cdots)$, so wissen wir aus Satz 5, daß $s(z) = S^{-1}(e^{-t}S(z))$ ist mit einer gewissen in $|z| < 1$ regulären schlichten Funktion $S(z)$. Soll aber die so gewonnene Funktion $S(z)$ *für jedes* $t > 0$ (es würde hier genügen, zu sagen, für jedes *genügend kleine* $t > 0$) eine in $|z| < 1$ reguläre *beschränkte* (schlichte) Funktion $s_t(z) = S^{-1}(e^{-t}S(z))$ liefern, so folgt, daß $S(z)$ den Einheitskreis auf ein sternförmiges Gebiet abbildet, daß also $S(z)$ eine *sternförmige* Funktion ist.

Die Funktion $s(z) = S^{-1}(e^{-t}S(z)) = e^{-t}z + \cdots$ ist dann für jedes $t > 0$ eine in $|z| < 1$ (reguläre) sternförmige, beschränkte und damit immer auch schlichte Funktion [11]).

10. *Haupteigenschaft des n-ten Variabilitätsbereiches der Koeffizienten einer schlichten Funktion.* Es sei $S(z) = z + s_2 z^2 + \cdots$ eine beliebige im Einheitskreis reguläre *sternförmige* Funktion. Mit ihrer Hilfe bilden wir für eine vorgegebene schlichte Funktion $F(z) = z + b_2 z^2 + \cdots$ die durch Iteration entstehende und wiederum normierte Funktion:

$$F_t^*(z) = e^t F(S^{-1}(e^{-t}S(z))) = z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots. \tag{10.1}$$

Sie ist ebenfalls wieder schlicht und regulär im Einheitskreis. Schreiben wir:

$$A(z) = S^{-1}(e^{-t}S(z)) = \alpha(z + a_2 z^2 + \cdots), \quad \alpha = e^{-t},$$

mit

$$\begin{aligned} a_2 &= s_2(1-\alpha), \\ a_3 &= s_3(1-\alpha^2) - 2s_2^2\alpha(1-\alpha), \\ a_4 &= s_4(1-\alpha^3) - s_2 s_3 \alpha(1-\alpha)(2+5\alpha) - s_2^3\alpha(1-\alpha)(1-5\alpha), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{10.2}$$

so erhalten wir z. B.:

$$\begin{aligned} B_2 &= a_2 + b_2\alpha, \\ B_3 &= a_3 + 2b_2\alpha a_2 + b_3\alpha^2, \\ B_4 &= a_4 + 2b_2\alpha a_3 + b_2\alpha a_2^2 + 3b_3\alpha^2 a_2 + b_4\alpha^3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{10.3}$$

oder:

$$\begin{aligned} B_2 &= s_2(1-\alpha) + b_2\alpha, \\ B_3 &= s_3(1-\alpha^2) - 2s_2^2\alpha(1-\alpha) + 2\alpha b_2 s_2(1-\alpha) + \alpha^2 b_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

allgemein:

$$B_n = \varphi_n(t; b_2, \ldots, b_n; s_2, \ldots, s_n) = \varphi_n(t; (b); (s)); \quad \alpha = e^{-t}.$$

(Wir schreiben kurz: $(b) = (b_2, \ldots, b_n)$, $(s) = (s_2, \ldots, s_n)$.)

Halten wir die Systeme (b) und (s) fest, so haben wir damit (bei variablem Parameter t, $0 < t < \infty$) im n-ten Koeffizientenraum $\mathfrak{R}^{2n-2}$ eine Kurve $\mathfrak{C}_{(b),(s)}(t)$, welche den Punkt (b) (für $t = 0$) mit dem Punkt (s) (für $t = \infty$, d. h. $\alpha = 0$) verbindet. Letzteres sieht man so ein. Es ist

$$\frac{d}{dz}F^*(z) = F^{*\prime}(z) = F'(S^{-1}(\alpha S(z))) \cdot S^{-1\prime}(\alpha S(z)) \cdot S'(z),$$

---

[11]) Verlangt man, daß $S^{-1}(a^{-t}S(z))$, $|a| < 1$, a nichtreelle feste Zahl, für beliebig kleines $t > 0$ wieder in $|z| < 1$ regulär und *beschränkt* ist, so ist $S(z)$ eine spiralförmig abbildende Funktion (vgl. hierzu: L. V. (29), S. 12). Doch seien diese hier nicht weiter betrachtet. Sie liefern auch für unsere späteren Betrachtungen des Iterationsprozesses im Endeffekt nichts Neues.

und dies strebt für $\alpha \to 0$ gegen $1 \cdot 1 \cdot S'(z)$; daher gilt:

$$F^*(z) = z + \cdots \to S(z) \quad \text{für} \quad \alpha \to 0.$$

11. Stellen wir noch den Tangentenvektor an die Kurve $\mathfrak{C}_{(b),(s)}(t)$ im Punkte $P = (b)$ auf. Er hat die Komponenten:

$$\left(\frac{d}{dt}\varphi_j\right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}(B_j)\right)_{t=0} \qquad (j = 2, \ldots, n).$$

Es ist:

$$(11.1) \quad \sum_1^\infty \left(\frac{d}{dt}B_n\right)_{t=0} z^n = \left[\frac{\partial}{\partial t}(e^t F(S^{-1}(e^{-t}S(z))))\right]_{t=0} \quad (B_1 = 1)$$

$$= [e^t F(S^{-1}(e^{-t}S)) - e^t F'(S^{-1}(e^{-t}S))\, S^{-1\prime}(e^{-t}S)\, e^{-t}S]_{t=0}$$

$$= F(z) - F'(z)\frac{S(z)}{S'(z)}.$$

Setzen wir $\dfrac{S}{S'} = z(1 + 2\Sigma\sigma_\nu z^{\nu-1})$, so ist

$$(11.2) \quad \sum_1^\infty \left(\frac{d}{dt}B_n\right)_{t=0} z^n = \sum_1^\infty z^n\left(-(n-1)\,b_n - 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu b_\nu\,\sigma_{n+1-\nu}\right) \quad (b_1 = 1)$$

$$= z^2(-b_2 - 2\sigma_2) + z^3(-2b_3 - 4b_2\sigma_2 - 2\sigma_3)$$

$$+ z^4(-3b_4 - 6b_3\sigma_2 - 4b_2\sigma_3 - 2\sigma_4) + \cdots.$$

Damit haben wir:

Satz 7. *Für den genauen Variabilitätsbereich $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ gilt: Mit jedem Punkt P in ihm gehört auch die von ihm ausgehende Kurve $\mathfrak{C}_{(b),(s)}(t)$ in ihrer Gesamtausdehnung dazu, sofern der Punkt $(s) = (s_2, \ldots, s_n)$ sich im genauen n-ten Variabilitätsbereich der Koeffizienten der im Einheitskreis regulären und sternförmigen Funktionen befindet. Der Richtungsvektor $(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ mit*

$$\xi_k = -(k-1)\,b_k - 2\sum_{\nu=1}^{\varkappa-1}\nu b_\nu\,\sigma_{\varkappa+1-\nu}$$

weist in keinem Randpunkt von $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ ins Äußere.

Dabei müssen wir noch näher erklären, was es heiße, daß eine *Richtung* in einem Randpunkt ins Äußere weist. Zwar sehen wir leicht aus der eben erwähnten Eigenschaft, daß von jedem Punkt des abgeschlossenen Bereiches $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ ein Bündel von Kurven zu gewissen Punkten im Inneren führt, daß der Rand unseres Bereiches in der Umgebung jedes Randpunktes aus einem $(2n-3)$-dimensionalen Jordanschen Flächenstück besteht. Daß dieses aber in jedem Punkte (der nicht auf der Normkurve liegt) stetig differentiierbar ist, wissen wir noch nicht. Daher wollen wir sagen, eine Halbgerade vom Randpunkt P aus bestimme eine *innere bzw. äußere Richtung für die Randfläche in P*, wenn es eine Richtungsumgebung für sie so gibt, daß die zugehörigen Halbgeraden von P aus in einer gewissen Vollumgebung nur innere bzw. äußere Punkte enthalten. Eine *Richtung*, welche zwar selbst nicht innere bzw. äußere Richtung für die Randfläche in P ist, jedoch noch Häufungsrichtung von solchen ist, nennen wir eine von innen bzw. außen *tangierende Richtung*.

Jeder Richtungsvektor $(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ der obigen Form *weist also in diesem Sinne ins Innere oder tangiert höchstens von innen.*

Dabei berechnen sich die σ_j, $j = 2, \ldots, n$, aus den $s_2, \ldots, s_n$. Die ξ_k hängen dann also nicht mehr linear von den $s_2, \ldots, s_k$ ab. Wir wollen durch eine Transformation des Koordinatenraumes diese Richtungsvektoren der Iterationskurven in ihren Komponenten linearisieren, d. h. einen solchen Koordinatenraum finden, in dem die betreffenden $\tilde{\xi}_k$

bilineare Funktionen der neuen Koordinaten des Anfangs- und des Endpunktes der Iterationskurven sind. Der neue Raum $\widetilde{\mathfrak{R}}$ wird uns für unser Problem eine gewisse Symmetrie liefern, welche für die weiteren Untersuchungen von Wert sein dürfte. Die Formel (11. 1) wird uns dabei einen Fingerzeig geben.

Bevor wir uns der weiteren Untersuchung der iterationsfesten Bereiche widmen, wollen wir kurz auf die sternförmigen Funktionen eingehen.

12. *Kennzeichnung der genauen Koeffizientenbereiche der im Einheitskreis regulären und sternförmigen Funktionen.* Für jede im Einheitskreis reguläre sternförmige Funktion $S(z) = z + s_2 z^2 + \cdots$ gilt: $\Re \dfrac{f'z}{f} > 0$ in $|z| < 1$. Es erweist sich im folgenden besonders zweckmäßig, für die nähere Untersuchung der Koeffizientenbereiche zu einem anderen Koordinatenraum $\widetilde{\mathfrak{R}}$ überzugehen. Wir wollen hinfort für irgendeine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z) = z + b_2 z^2 + \cdots$ mit $f'(z) \neq 0$ in $|z| < 1$, die Funktion

$$\frac{f}{f'} = z + 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \beta_\nu z^\nu$$

bilden und daraus jeweils den zugeordneten Punkt im Koordinatenraum $\widetilde{\mathfrak{R}}$

$$(\beta) = (\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n) \text{ für alle } n$$

entnehmen. Die neuen Koordinaten stehen mit den alten in den Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= -\frac{b_2}{2}\,, \\
\beta_3 &= -b_3 + b_2^2, \\
\beta_4 &= +\frac{1}{2}(-3b_4 + 7b_2 b_3 - 4b_2^3), \\
\beta_5 &= \frac{1}{2}(-4b_5 + 10 b_2 b_4 - 20 b_2^2 b_3 + 6 b_3^2 + 8 b_2^4), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{12. 1}$$

Diese Beziehung ist im folgenden Sinn eindeutig umkehrbar: Erstens lassen sich aus den $\beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ wieder eindeutig die $b_2, b_3, \ldots$ berechnen:

$$\begin{aligned}
b_2 &= -2\beta_2\,, \\
b_3 &= 4\beta_2^2 - \beta_3\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{12. 2}$$

und zweitens ist für jede in $|z| < 1$ reguläre und dort nirgends verschwindende Funktion

$$\Phi(z) = 1 + 2(\beta_2 z + \beta_3 z^2 + \cdots)$$

die Funktion

$$F = z e^{\int_0^z \frac{1-\Phi}{\Phi z}\, dz} = z + b_2 z^2 + \cdots,$$

wie man sofort erkennt, in $|z| < 1$ regulär, dort von nicht verschwindender Ableitung und erfüllt die Beziehung

$$\frac{F}{F'} = \Phi \cdot z = z + 2(\beta_2 z^2 + \cdots).$$

Entsprechend haben wir also auch (es ist ja $S' \neq 0$ in $|z| < 1$):

$$\frac{S}{S'} = z + 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \sigma_\nu z^\nu\,,$$

$$\sigma_2 = -\frac{s_2}{2}\,, \quad \sigma_3 = -s_3 + s_2^2, \ \ldots \qquad \text{(analog zu (12. 1)).} \tag{12. 3}$$

Nun ist aber bekannt[12]), daß für die Funktion $\frac{1}{2}\frac{S}{S'z} = \frac{1}{2} + \sum_{2}^{\infty} \sigma_\nu z^{\nu-1}$, deren Realteil ja nach dem eben Erwähnten ebenfalls wie $\Re \frac{S'z}{S}$ im Innern des Einheitskreises positiv ist, im n-ten Koeffizientenraum $\mathfrak{R}^{2n-2}$ der Punkt mit den Koordinaten $(\sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ im kleinsten konvexen Bereich $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ gelegen ist, der die Normkurve

$$\sigma_2 = e^{i\vartheta}, \quad \sigma_3 = e^{2i\vartheta}, \quad \ldots, \quad \sigma_n = e^{(n-1)i\vartheta} \tag{12.4}$$

enthält.

Umgekehrt ist die Funktion $S_0 = \frac{z}{(1+\eta z)^2}$, $\eta = e^{i\vartheta}$, in $|z| < 1$ sternförmig. Für sie gilt

$$\frac{1}{2}\frac{S}{S'z} = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} \eta^\nu z^\nu.$$

Außerdem ist mit je p vorgegebenen Funktionen

$$S_1(z) = z + \cdots, \quad \ldots, \quad S_p(z) = z + \cdots,$$

welche in $|z| < 1$ regulär und sternförmig sind, auch die Funktion $S^*(z) = z + \cdots$ regulär und sternförmig, für welche die Beziehung besteht:

$$\Phi(z) = \frac{S^*}{S^{*\prime}z} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{S_j}{S_j' z} \tag{12.5}$$

mit beliebigen λ_j, für welche $\sum_{1}^{p} \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geqq 0$, für alle $1 \leqq j \leqq p$ gilt. Denn erstens ist $\Phi(z) = 1 + \beta_2^* z + \cdots \neq 0$ in $|z| < 1$, und daher erhalten wir der Reihe nach als sämtlich in $|z| < 1$ reguläre Funktionen

$$\frac{S^{*\prime}(z) \cdot z}{S^*(z)} = \frac{1}{1 + \beta_2^* z + \cdots} = 1 - \beta_2^* z + \cdots$$

und mit ihr auch

$$\left(\frac{S^{*\prime}(z) \cdot z}{S^*(z)} - 1\right)\frac{1}{z} = -\beta_2^* + \gamma z + \cdots,$$

$$\log \frac{S^*}{z} = \int_0^z \left(\log \frac{S^*}{z}\right)' dz = \int_0^z \left(\frac{S^{*\prime}}{S^*} - \frac{1}{z}\right) dz = \int_0^z \frac{1-\Phi}{\Phi z}\, dz$$

und schließlich

$$S^* = z e^{\int_0^z \frac{1-\Phi}{\Phi z} dz}.$$

Andererseits ist

$$\Re \frac{S^*}{S^{*\prime}z} = \sum_{1}^{p} \lambda_j \Re \frac{S_j}{S_j' z} > 0 \qquad \text{in } |z| < 1.$$

Eine solche Funktion ist aber dann auch im Einheitskreis schlicht und sternförmig.

Da sich aber nun[13]) für jeden Punkt P_0 im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ n Punkte auf der Normkurve $P^{(j)} = (e^{i\vartheta_j}, e^{2i\vartheta_j}, \ldots)$ und dazu gehörige Gewichte

[12]) L. V. (6).
[13]) L. V. (6), S. 11.

$\lambda_j \geqq 0$, $\Sigma\lambda_j = 1$, so angeben lassen, daß P_0 Schwerpunkt dieser auf die n Punkte verteilten Massen ist, so erkennen wir, daß es zu jedem Punkt $(\sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ im Innern oder auf dem Rande von $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ eine Funktion $S(z) = z + \cdots$ gibt, welche im Einheitskreis regulär, schlicht und sternförmig ist und deren Entwicklung in $z=0$ so beginnt:

$$S(z) = z + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \cdots \quad \text{mit} \quad \frac{S}{S'} = z + 2\sum_2^\infty \sigma_\nu z^\nu,$$

d. h. aber, die konvexe Hülle $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ von (12.4) ist der genaue n-te Variabilitätsbereich für die im Einheitskreis regulären und sternförmigen Funktionen.

Es ist $\mathfrak{B}_*^{(\nu)}$ durch die Ungleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} &|\sigma_2| \leqq 1 \quad \text{für} \quad \nu = 2, \\ &|\sigma_3 - \sigma_2^2| \leqq 1 - |\sigma_2|^2 \quad \text{für} \quad \nu = 3, \\ &|\sigma_4(1 - |\sigma_2|^2) - 2\sigma_3\sigma_2 + \sigma_2^3 + \bar{\sigma}_2\sigma_3^2| \leqq (1 - |\sigma_2|^2)^2 - |\sigma_3 - \sigma_2^2|^2 \quad \text{für} \quad \nu = 4, \end{aligned} \tag{12.6}$$

allgemein (für $\nu = n$) [14]:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \\ \bar{\sigma}_2 & 1 & \cdots & \sigma_{n-1} \\ \bar{\sigma}_3 & \bar{\sigma}_2 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{\sigma}_n & \cdots & \bar{\sigma}_2 & 1 \end{vmatrix} \geqq 0$$

oder im ursprünglichen Koordinatenraum:

$$|s_2| \leqq 2, \quad |3s_2^2 - 4s_3| \leqq 4 - |s_2|^2, \text{ usw.}$$

13. Sei nun $\mathfrak{B}_0^{(n)}$ irgendein iterationsfester Bereich in $\mathfrak{R}^{2n-2}$. Wir gehen zu den Koordinaten des Raumes $\tilde{\mathfrak{R}}$ über. In diesem schreibt sich die Iteration wie folgt:

$$\frac{F^*}{F^{*\prime}z} = 1 + 2\sum_{n=2}^\infty X_n z^{n-1}, \quad \frac{F}{F'z} = 1 + 2\sum_{n=2}^\infty \beta_n z^{n-1}, \quad \frac{S}{S'z} = 1 + 2\sum_{n=2}^\infty \sigma_n z^{n-1},$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \beta_2\alpha + \sigma_2(1-\alpha), \\ X_3 &= \beta_3\alpha^2 + \sigma_3(1-\alpha^2), \\ X_4 &= \beta_4\alpha^3 - 2\beta_3\sigma_2\alpha^2(1-\alpha) + \beta_2\sigma_3\alpha(1-\alpha)^2 + \sigma_4(1-\alpha^3), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{13.1}$$

allgemein

$$X_n = X_n(t; (\beta), (\sigma)); \quad \alpha = e^{-t}, \ (\beta) = (\beta_2, \ldots, \beta_n), \quad (\sigma) = (\sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Im $\tilde{\mathfrak{R}}^{2n-2}$ verbindet die Kurve

$$\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t) = (X_2(t), \ldots, X_n(t)) \tag{13.2}$$

den Punkt (β) $(t=0)$ mit (σ) $(t=\infty)$. Wie man sieht, ist sie eine Kurve von höchstens n-ter Ordnung — man betrachte dazu den Parameter α — und im allgemeinen auch von genau n-ter Ordnung, und liegt jeweils sicher in einem $(2n-4)$-dimensionalen ebenen Teilraum. Ihre Ordnung kann sich allerdings auch erniedrigen. (Beispiel: $n=3$, $(\beta) = (1, 1)$, $(\sigma) = (1, -1)$.) Berechnen wir den Tangentenvektor der Kurve $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ im Punkte $P = (\beta)$. Seine j-te Komponente ist

$$\omega_j(P) = \left(\frac{d}{dt} X_j(t)\right)_{t=0}.$$

---

[14]) L. V. (6), S. 17ff.

Wir finden für $\Phi^* = \frac{F^*}{F^{*\prime}}$, $\Phi = \frac{F}{F'}$:

$$(13.3)\qquad \frac{d}{dt}\Phi^*(z) = \frac{d}{dt}\frac{F(\varphi)}{F'(\varphi)\varphi'} = \left(\frac{F}{F'}\right)'\frac{1}{\varphi'}\frac{d}{dt}\varphi - \frac{F}{F'}\frac{1}{\varphi'^2}\frac{d}{dt}\varphi'.$$

Für $\varphi(z) = S^{-1}(\alpha S)$, $\alpha = e^{-t}$, ist aber

$$(13.4)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = -S^{-1'}(e^{-t}S)\,e^{-t}S, \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{S}{S'},$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \varphi' = S^{-1'}(\alpha S)\,\alpha S',$$

$$\frac{d}{dt}\varphi' = -S^{-1''}(\alpha S)\,\alpha^2 S' S - S^{-1'}(\alpha S)\,\alpha S',$$

$$(13.5)\qquad \left(\frac{d}{dt}\varphi'\right)_{t=0} = -S^{-1''}(S)\,S'\cdot S - S^{-1'}(S)\,S';$$

wegen der Beziehungen $S^{-1}(S) = z$, $S^{-1'}(S)\,S' = 1$, $-S^{-1''}(S)\,S'^2 = \frac{S''}{S'}$ folgt:

$$(13.6)\qquad \left(\frac{d}{dt}\varphi'\right)_{t=0} = \frac{SS''}{S'^2} - 1 = -\left(\frac{S}{S'}\right)'.$$

Daher erhalten wir:

$$(13.7)\qquad 2\sum_2^\infty \left(\frac{d}{dt}X_n(t)\right)_{t=0} z^n = \left(\frac{d}{dt}\Phi^*(z)\right)_{t=0} = -\left(\frac{F}{F'}\right)'\frac{S}{S'} + \frac{F}{F'}\left(\frac{S}{S'}\right)'$$

oder

$$\sum_2^\infty \left(\frac{d}{dt}X_n(t)\right)_{t=0} z^n = -\,[(\beta_2-\sigma_2)z^2 + 2(\beta_3-\sigma_3)z^3 + 3(\beta_4-\sigma_4+2\beta_3\sigma_2-2\sigma_3\beta_2)z^4$$
$$+ 4(\beta_5-\sigma_5+\beta_4\sigma_2-\beta_2\sigma_4)z^5 + \cdots$$
$$+ ((n-1)\,(\beta_n-\sigma_n) + 2\sum_{\nu=2}^{n-1}(2\nu-n-1)\,\beta_\nu\sigma_{n+1-\nu}))\,z^n + \cdots],$$

hieraus:

$$(13.8)\qquad \omega_n \equiv \left(\frac{d}{dt}X_n(t)\right)_{t=0} = -\,[(n-1)\,(\beta_n-\sigma_n) + 2\sum_{\nu=2}^{n-1}(2\nu-n-1)\,\beta_\nu\sigma_{n+1-\nu}].$$

14. *Vorbereitung des Hauptsatzes* 10. Hieraus erkennt man (wegen der Linearität des Ausdruckes ω_n in den σ_j), daß das Richtungsbüschel $\mathfrak{B}(\beta) = (\omega_j(\beta))$ der von dem einen Punkt (β) ausgehenden Kurven $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$, wenn (σ) beliebig im Bereich $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ variiert, das kleinste konvexe Richtungsbüschel ist, das den bereits früher erwähnten zweidimensionalen Richtungskegel $\mathfrak{K}^2(P)$ umfaßt. Wir erhalten also als notwendiges Kriterium für einen iterationsfesten Bereich, wenn wir uns der Erklärungen auf S. 72 erinnern:

Satz 8. *In jedem Randpunkt $P = (\beta)$ eines iterationsfesten Bereiches weist keine Richtung des $(2n-3)$-dimensionalen Richtungskegels $\mathfrak{K}^{2n-3}(P)$, der das Richtungsvollbüschel $\mathfrak{B}(\beta)$ berandet, ins Äußere des Bereiches.*

Auf der anderen Seite haben wir das hinreichende Kriterium:

Satz 9. *Es habe ein Bereich im $\widetilde{\mathfrak{K}}^{2n-2}$ die Eigenschaft, daß in jedem Randpunkt $P = (\beta)$ alle von ihm ausgehenden Kurven* (13. 1) $X_j = X_j(t; (\beta), (\sigma))$, *die auf dem Rande des von (β) zu allen Punkten von $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ hinführenden Kurvenbüschels liegen* [15]), *nirgends in*

[15]) d. h. also alle „$\mathfrak{B}_*^{(n)}$ von (β) umhüllenden" Iterationskurven.

einer gewissen Umgebung ins Äußere dringen. Dann ist der Bereich iterationsfest und enthält den Bereich $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ der schlichten Funktionen.

In der Tat sind nämlich dann insbesondere die Kurven $\mathfrak{C}_\eta(P)$, die von P ausgehen, für jedes $\eta = e^{i\vartheta}$ in einer gewissen Umgebung ebenfalls im Innern oder höchstens auf dem Rande gelegen, weil sie ja auch unter den Kurven $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ vorkommen und all diese von den im Satz angegebenen umhüllt werden. Damit ist aber auch dieses hinreichende Kriterium bewiesen.

Im übrigen sehen wir genau wie früher auf direktem Wege (obwohl wir hier nicht mehr eigens nötig haben, es direkt herzuleiten): auch keine Kurve $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ dringt irgendwo in ihrem *Gesamtverlauf* ins Äußere des Bereiches, wenn nur ihr Anfangspunkt nicht im Äußeren liegt. Dies folgt wieder genau so aus der für die Funktion $g_{(\sigma),t}(z) = S^{-1}(e^{-t}S(z))$ bestehenden funktionalen Beziehung:

$$g_{(\sigma),t_1}(g_{(\sigma),t_2}(z)) = g_{(\sigma),t_1+t_2}(z). \tag{14.1}$$

15. *Der Hauptsatz* 10. Nun mögen irgend zwei Bereiche im $\widetilde{\mathfrak{R}}^{2n-2}$ der Koordinaten $(\beta_2, \ldots, \beta_n)$ vorgegeben sein, welche die eben in Satz 9 erwähnte Eigenschaft haben, daß die von jedem Randpunkt ausgehende Kurve $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ bei beliebig im Bereich $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ variierendem Endpunkt (σ) in einer gewissen Umgebung wenigstens nirgends ins Äußere dringt, dann kommt diese Eigenschaft auch dem *Durchschnittsbereich* der beiden Bereiche zu. Wir können dies ebenso für beliebig endlich oder abzählbar unendlich viele Bereiche aussprechen und erhalten so das Ergebnis:

Satz 10 (*Haupteigenschaft des Bereiches $\mathfrak{B}_s^{(n)}$*). *Der genaue n-te Variabilitätsbereich $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ der Koeffizienten der im Einheitskreis regulären und schlichten Funktionen ist der kleinste den Bereich $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ enthaltende Bereich mit der Randeigenschaft, daß kein beliebig kleines Anfangskurvenstück des jedem Randpunkt P zugeordneten Kurvenbüschels $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ mit beliebig variierendem Endpunkt $(\sigma) < \mathfrak{B}_*^{(n)}$ ins Äußere dringt.*

Übrigens bleibt Satz 10 richtig, wenn wir nur das Kurvenbüschel $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ mit beliebig *auf der Normkurve* variierendem Endpunkt (σ) verwenden (d. h. in ihm „$(\sigma) < \mathfrak{B}_*^{(n)}$“ durch die Worte „$(\sigma)$ auf der Normkurve“ ersetzen).

Wir können sogar sagen:

Satz 11. *Zu jedem Randpunkt $P(\beta)$ von $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ gibt es sogar eine Kurve $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ mit einem gewissen Endpunkt (σ) in $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ und eine Randpunktfolge $P_\nu \to P$, so daß gewisse jeweils in P_ν von innen tangierende Richtungsvektoren $\mathfrak{V}_\nu$ des Randes gegen die Tangente der Kurve $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ in P konvergieren.*

Wir bemerken, daß auch Satz 11 richtig bleibt, wenn wir an Stelle von „(σ) in $\mathfrak{B}_*^{(n)}$“ die Forderung setzen: „(σ) auf der Normkurve“. Der nachfolgende Beweis gilt hierfür nämlich ganz genau so.

Beweis. Es genügt, den Beweis für einen Randpunkt zu führen, der nicht auf der Normkurve liegt, weil sich ja auch gegen die Punkte der Normkurve solche Randpunkte häufen. Gäbe es aber für einen Randpunkt P von $\mathfrak{B}_s^{(n)}$, der nicht auf der Normkurve liegt, eine Vollumgebung $U(P)$ von der Art, daß für *keine* Folge von Randpunkten P_ν aus ihr, welche gegen einen Randpunkt Q aus $U(P)$ konvergiert, der Fall eintritt, daß zu P_ν gehörende von innen tangierende Richtungen gegen einen Vektor $\mathfrak{V}_Q$ konvergieren, der unserem dem Punkte Q zugeordneten Richtungsbündel angehört, dann könnten wir unsere Randfläche, soweit sie in U liegt, so durch eine stetig differentiierbare Deformation des ganzen *Raum*stückes abändern, daß der neue begrenzte Bereich auch noch iterations-

fest und zugleich ein echter Teilbereich von $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ ist, d. h. also $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ wäre dann nicht der kleinste derartige Bereich. (Es genügt, hierbei die stetige Zuordnung des Richtungsbündels zu jedem Randpunkt zu beachten.) Daher gibt es in jeder Umgebung U von P wenigstens eine solche Folge P_ν mit der obigen Eigenschaft, und damit haben wir Satz 11 bewiesen.

16. *Zusammenfassung.* Wir haben also jedem im Äußeren von $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ gelegenen Punkt (β) einen $(2n-3)$-dimensionalen Richtungskegel zugeordnet, den wir daraus erhalten, daß wir alle möglichen Kurven $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ zu den *Randpunkten* von $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ hinziehen und von diesen ihnen in P zukommenden Tangentenrichtungen wiederum lediglich den *berandenden Richtungskegel* benützen.

Unser abgeschlossener genauer Variabilitätsbereich $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ ist also von der Art, daß

1. $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ und insbesondere die Normkurve

$$(e^{i\vartheta}, e^{2i\vartheta}, \ldots, e^{(n-1)i\vartheta}), \quad 0 \leqq \vartheta < 2\pi$$

in ihm enthalten ist,

2. für jeden Randpunkt P eine Folge von Randpunkten $P_\nu \to P$ und zugehörigen in P von innen tangierenden Richtungsvektoren $\mathfrak{V}_\nu$ so existiert, daß a) die $\mathfrak{V}_\nu$ gegen eine Richtung $\mathfrak{V}$ aus dem zugeordneten Richtungskegel konvergieren und b) dabei die Kurven $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ $[(\sigma)$ beliebig in $\mathfrak{B}_*^{(n)}]$ in einer Umgebung nirgends ins Äußere dringen,

3. kein kleinerer Bereich mit den Eigenschaften 1 und 2 existiert.

Diese Kennzeichnung bedeutet *für jeden stetig differentiierbaren Teil des Randes von* $\mathfrak{B}_s^{(n)}$, daß er einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt.

17. *Die Differentialgleichung für einen beliebigen differentiierbaren Teil des Randes von* $\mathfrak{B}_s^{(n)}$. Die Aufstellung der Differentialgleichung, der jeder stetig differentiierbare Teil der Berandungsfläche des genauen Variabilitätsbereiches $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ genügen muß, ist ein Eliminationsproblem.

Wir betrachten im folgenden auf der $(2n-3)$-dimensionalen Berandungsfläche des $(2n-2)$-dimensionalen Bereiches $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ nur solche Flächenteile, d. h. $(2n-3)$-dimensionale Bereiche unserer Fläche, in denen eine eindeutige ($(2n-3)$-dimensionale) Tangentialhyperebene $\mathfrak{T}(P)$ existiert und stetig ist, schließen also insbesondere Kantenpunkte aus. Wir wissen, daß die Tangentialhyperebene $\mathfrak{T}(P)$ in einem solchen Punkte P wenigstens eine Kurve $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ berührt, worin (σ) auf der Normkurve $(\sigma_\nu = e^{i(\nu-1)\vartheta})$ gelegen ist, und alle Richtungen aus dieser einparametrigen Schar von Kurven ((σ) beliebig auf der Normkurve) *ganz auf einer Seite* läßt [16]).

Wenn $F_n(\beta_2, \overline{\beta}_2, \ldots, \beta_n, \overline{\beta}_n) = 0$ die Gleichung des Randes von $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ sei, so setzen wir speziell:

$$(17.1) \qquad \sigma_k = e^{i(k-1)\vartheta} = \eta^{k-1}; \quad \frac{\partial F_n}{\partial \beta_j} = p_j, \quad \frac{\partial F_n}{\partial \overline{\beta}_j} = q_j = \overline{p_j};$$

$$\lambda_j(\vartheta) = -(j-1)\beta_j + 2\sum_{\nu=2}^{j-1}(-2\nu + j + 1)\beta_\nu e^{(j-\nu)i\vartheta} + (j-1)e^{(j-1)i\vartheta}.$$

Unsere Randfläche genügt dann in jedem Punkte des betrachteten Flächenteiles der partiellen Differentialgleichung

$$\Phi(p_2, \ldots, p_n; q_2, \ldots, q_n; (\beta); (\bar{\beta})) = 0,$$

---

[16]) Um dies zu erschließen, hätten wir natürlich die Überlegungen, welche zu den Nachsätzen von Satz 10 und 11 führen, auch direkt an Nr. 7 anschließen können.

welche man aus den beiden folgenden Gleichungen durch Elimination von ϑ erhält:

$$(17.\,2)\qquad \begin{aligned} &\sum_{j=2}^{n}\left(\lambda_j(\vartheta)\,p_j+\overline{\lambda_j(\vartheta)}\,q_j\right)=0,\\ &\sum_{j=2}^{n}\left(\left(\frac{d}{d\vartheta}\,\lambda_j(\vartheta)\right)p_j+\overline{\left(\frac{d}{d\vartheta}\,\lambda_j(\vartheta)\right)}q_j\right)=0, \qquad \lambda_j(\vartheta)\text{ aus (17. 1).}\end{aligned}$$

18. Allerdings kann man diese Differentialgleichung um eine reelle Dimension noch erniedrigen, wenn man bedenkt, daß unser Bereich $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ und damit auch seine Randfläche die folgende einparametrige Gruppe von Transformationen in sich gestattet:

$$x_2=e^{i\vartheta}x_2^0,\ \ldots,\ x_n=e^{(n-1)i\vartheta}x_n^0.$$

So können wir z. B. für $\mathfrak{B}_s^{(3)}$ uns darauf beschränken, den Durchschnitt des Bereiches mit $\Im\beta_2=0$ zu bestimmen. Setzen wir hier zur Abkürzung:

$$x=|\beta_2|, \qquad y+iz=\beta_3\frac{\overline{\beta_2}}{\beta_2}, \qquad y,\,z\text{ reell},$$

so sei der Rand des Bereiches $\mathfrak{B}_s^{(3)}$ in der Form

$$-f(x,y)\leqq z\leqq f(x,y)$$

gegeben. (Die Symmetrie in bezug auf $z=0$ folgt daraus, daß mit $f(z)=\sum_1^\infty b_\nu z^\nu$ auch die Funktion $\sum_1^\infty \overline{b_\nu}\,z^\nu$ schlicht ist.) Dabei sei (x,y) im genauen Bereich der reellen Koeffizienten (β_2,β_3) einer beliebigen schlichten Funktion gelegen [17]). Dann müssen die Vektoren [18])

$$\mathfrak{x}_1=\left(1,0,0,\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \mathfrak{x}_2=\left(0,0,1,\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \mathfrak{x}_3=(0,x,-2f,2y),$$

zusammen mit dem Vektor $\mathfrak{x}_4=(\cos\vartheta-x,\ \sin\vartheta,\ 2(\cos 2\vartheta-y),\ 2(\sin 2\vartheta-f))$ ebenso wie zusammen mit dem Vektor $\mathfrak{x}_5=(-\sin\vartheta,\cos\vartheta,-4\sin 2\vartheta,4\cos 2\vartheta)$ linear abhängig sein, d. h. also je eine verschwindende Determinante besitzen. Dies ergibt die beiden Gleichungen:

$$(18.\,1)\qquad \begin{aligned} &2(y+ff_y)\sin\vartheta+xf_x\cos\vartheta-2x\sin 2\vartheta+2xf_y\cos 2\vartheta+x(2f-2yf_y-xf_x)=0\\ &2(y+ff_y)\cos\vartheta-xf_x\sin\vartheta-4x\cos 2\vartheta-4xf_y\sin 2\vartheta=0;\end{aligned}$$

hieraus ist ϑ zu eliminieren.

IV. Methode der infinitesimalen mehrfachen Schlitze.

19. *Mehrfache Radialschlitze.* Zunächst die Frage: Welche sternförmigen Abbildungen gehören zu einem Punkte (σ) auf dem Rande des Bereiches $\mathfrak{B}_*^{(n)}$?

Zu jedem Randpunkt (σ) auf $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ gibt es p $(1\leqq p\leqq n-1)$ Punkte auf der Normkurve mit den Parameterwerten $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_p$ und dazugehörige positive Gewichte $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ so, daß

$$\sum_1^p\lambda_\nu=1, \qquad \sigma=\sum_{\nu=1}^{p}\lambda_\nu e^{i(j-1)\vartheta_\nu} \qquad (j=2,\ldots,n)$$

ist. Wir wollen die verschiedenen Fälle von p in der einen Formel zusammenfassen

$$\sigma_j=\sum_{\nu=1}^{n-1}\lambda_\nu\eta_\nu^{j-1} \qquad (\eta_\nu=e^{i\vartheta_\nu})$$

---

[17]) Siehe Nr. **28**.

[18]) Wir schreiben die reellen Komponenten: $(\Re\beta_2,\Im\beta_2,\Re\beta_3,\Im\beta_3)$.

und lassen dabei $\lambda_\nu \geqq 0$ zu, $\sum_1^{n-1} \lambda_\nu = 1$. Die λ_ν und η_ν sind eindeutig durch (σ) bestimmt [19]).

Dann gilt für die zugehörige Abbildungsfunktion $f(z)$:

$$\frac{f}{f'} = z \sum_1^{n-1} \lambda_\nu \frac{1+\eta_\nu z}{1-\eta_\nu z}. \tag{19. 1}$$

Geht man zum Koeffizientenraum von $\frac{f'}{f}$ über, so sind darin die Bereiche $[\mathfrak{B}_*^{(n)}]$ ebenfalls konvex [20]), und unserem Randpunkt (σ) entspricht dort ein gewisser Randpunkt (τ) von $[\mathfrak{B}_*^{(n)}]$. Daher gibt es auch $2(n-1)$ [21]) Zahlen

$$\zeta_\nu = e^{i\delta_\nu}, \quad \mu_\nu \geqq 0, \quad \Sigma\mu_\nu = 1, \qquad \nu = 1, \ldots, n-1,$$

sodaß

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{z} \sum_1^{n-1} \mu_\nu \frac{1-\zeta_\nu z}{1+\zeta_\nu z} \tag{19. 2}$$

ist. Hieraus erhält man aber

$$\left(\log \frac{f}{z}\right)' = \frac{f'}{f} - \frac{1}{z} = -2\Sigma\mu_\nu \frac{\zeta_\nu}{1+\zeta_\nu z},$$

$$\log \frac{f}{z} = -2\Sigma\mu_\nu \log(1+\zeta_\nu z)$$

oder

$$f = \frac{z}{\prod_{\nu=1}^{n-1} (1+\zeta_\nu z)^{2\mu_\nu}}, \tag{19. 3}$$

worin im Nenner bei jedem Faktor derjenige Funktionszweig genommen sei, der für $z = 0$ den Wert 1 hat.

Ganz entsprechend unseren früheren Überlegungen folgt, daß $f(z)$ im Einheitskreis regulär, schlicht und sternförmig ist. Aus der Entwicklung von $f(z)$ in den Punkten $z = -\bar{\zeta}_\nu$ folgert man, daß das Bildgebiet dadurch entsteht, daß man die Ebene längs p radialer geradliniger Schlitze vom Unendlichen her aufschneidet. Je zwei benachbarte Radialschlitze bilden untereinander die Winkel $2\mu_\nu\pi$, ihre Endpunkte im Endlichen liegen in

$$f(-\bar{\eta}_\nu) = \frac{-\bar{\eta}_\nu}{\prod_1^{n-1} (1-\zeta_\nu\bar{\eta}_\nu)^{2\mu_\nu}}.$$

20. *Infinitesimale gegabelte Schlitzabbildungen.* Wir bilden aus der Funktion $f(z)$ (von 19. 3) die beschränkte sternförmige Abbildung:

$$\varphi = f^{-1}(e^{-t} f(z)), \quad t > 0; \tag{20. 1}$$

dann ist

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{f}{f'} = -z \sum_1^{n-1} \lambda_\nu \frac{1+\eta_\nu z}{1-\eta_\nu z},$$

---

[19]) L. V. (6), S. 11.

[20]) und zwar ist $[\mathfrak{B}_*^{(n)}]$ der kleinste konvexe Bereich, der die Normkurve $(e^{i\vartheta}, \ldots, e^{i(n-1)\vartheta})$ enthält.

[21]) wiederum eindeutig bestimmte (siehe Fußnote [19])).

und damit für eine beschränkte schlichte normierte Abbildung $w = F(z)$:

$$\left(\frac{d}{dt}\,\varphi(F(z))\right)_{t=0} = -\,w\sum_{\nu=1}^{n-1}\lambda_\nu\,\frac{1+\eta_\nu w}{1-\eta_\nu w}. \tag{20. 2}$$

Sei $\mathfrak{J}_p$ ein *Gabelschlitz*, der von der Peripherie des Einheitskreises aus ins Innere ragt und den Nullpunkt vermeidet, d. h. ein (abgesehen vom einen Endpunkt) in $|z| < 1$ gelegener zusammenhängender endlicher topologischer (Kurven-) Komplex (= Gesamtheit von endlich vielen Jordankurvenstücken, welche höchstens gewisse Endpunkte gemeinsam haben), der 1. ein topologischer Baum ist (d. h. also, es soll nicht möglich sein, aus gewissen von den Jordankurvenstücken eine geschlossene Jordankurve zu bilden) und 2. genau einen Punkt auf $|z| = 1$, dagegen nicht den Nullpunkt enthält. Außerdem mögen genau p freie Endpunkte im Innern des Einheitskreises vorhanden sein. Dann wollen wir $\mathfrak{J}_p$ einen *p-fachen Gabelschlitz* nennen, $p \geqq 1$.

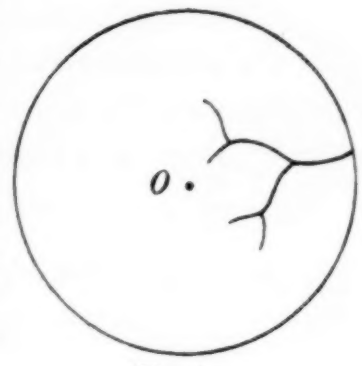

Fig. 1.

Nehmen wir aus dem Einheitskreis $|w| < 1$ die gegabelten Schlitze $\mathfrak{J}_{p_1}, \ldots, \mathfrak{J}_{p_\nu}$ heraus, welche miteinander punktfremd sind, abgesehen evtl. von ihren Endpunkten auf $|w| = 1$, und welche den Nullpunkt vermeiden, so heiße ein solches Gebiet ein *beschränktes p-faches Gabelschlitzgebiet*, wenn $p_1 + p_2 + \cdots + p_\nu = p$ ist.

21. Nach diesen Erklärungen können wir nun aber in Hinblick auf (20. 2) genau die gleichen Überlegungen anstellen, wie Löwner es in seiner Arbeit für die (gewöhnlichen) in unserem Sinne 1-fachen beschränkten Schlitzgebiete tut. Weil die Beweisführung vollkommen gleich läuft, begnügen wir uns mit dem Resultat. Wir erhalten auf diese Weise den

Satz 12. *Für jedes beschränkte p-fache Schlitzgebiet gibt es* $2p$ *stetige reellwertige Funktionen* $\vartheta_\nu(t)$, $\lambda_\nu(t) \geqq 0$, $0 \leqq t \leqq t_0$, $\nu = 1, \ldots, p$, *mit* $\sum_1^p \lambda_\nu(t) = 1$, *sodaß die zugehörige normierte Abbildungsfunktion* $w = \varphi(z)$ *durch Integration der Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dt}\,\varphi(z,t) = -\,\varphi(z,t)\sum_{\nu=1}^{p}\lambda_\nu\,\frac{1+\eta_\nu\varphi(z,t)}{1-\eta_\nu\varphi(z,t)} \quad \textit{mit} \quad \eta_\nu = e^{i\vartheta_\nu(t)} \tag{21.1}$$

und den Anfangsbedingungen $\varphi(z,0) = z$ *als Lösung* $\varphi(z,t_0) = \varphi(z) = e^{-t_0}(z + \cdots)$ *gewonnen werden kann.*

Wir haben damit eine Verallgemeinerung der Löwnerschen Differentialgleichung [22]) erhalten. Umgekehrt gilt auch hier:

Satz 13. *Jede Lösung von* (21. 1) *liefert bei beliebigen stetigen oder höchstens endlich oft unstetigen Funktionen* $\vartheta_\nu(t)$, $\lambda_\nu(t) \geqq 0$, $0 \leqq t \leqq t_0$, $\sum_1^p \lambda_\nu = 1$, *eine im Einheitskreis reguläre und schlichte beschränkte Abbildung* $(0 < t_0)$.

Dies schließt man nach demselben Verfahren, das wir schon einmal anwandten [23]): Erstens ist jede Lösung von (21. 1), sofern die Funktionen λ_ν, η_ν im Intervall $0 \leqq t \leqq t_0$ stückweise konstant sind (bei Aufteilung auf *endlich* viele, etwa q, Teilintervalle) eine schlichte Abbildung von der Form $\varphi_1(\ldots\varphi_q(z))$ worin $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ elementare p-fache beschränkte Schlitzabbildungen von der Form (19. 1) sind [24]). Und zweitens läßt sich

---

[22]) L. V. (8), S. 117. [23]) Siehe Nr. **2**.

[24]) Denn für $\varphi = f^{-1}(e^{-t}f)$ ist $\frac{d\varphi}{dt} = -f^{-1\prime}(e^{-t}f)\,e^{-t}f$ und

$$f^{-1}(f(z)) = z, \quad f^{-1\prime}(u) = \frac{1}{f'(f^{-1}(u))}, \quad -\frac{u}{f'(f^{-1}(u))} = f^{-1}(u)\cdot\sum_1^p\lambda_\nu\,\frac{1+\eta_\nu f^{-1}(u)}{1-\eta_\nu f^{-1}(u)}$$

nach (19. 1), und hieraus $(u = e^{-t}f(z))$: $\frac{d\varphi}{dt} = -\,\varphi\cdot\sum_1^p\lambda_\nu\,\frac{1+\eta_\nu\varphi}{1-\eta_\nu\varphi}$.

wiederum jede Lösung von (21. 1) mit solchen ebengenannten approximieren, wobei wir lediglich zu bedenken haben einerseits, daß (wie aus der koeffizientenweisen Integration der Differentialgleichung folgt) die Koeffizienten dabei konvergieren, und andererseits, daß wir eine normale Folge (mit $\varphi'(0) = e^{-t_0} = \text{const.}$ für alle Funktionen der Folge) vor uns haben. Dann folgt bekanntlich aus der Schlichtheit der Funktionen der Folge auch diejenige für die Grenzfunktion.

22. *Integration der verallgemeinerten Differentialgleichung.* Für die Integration der Differentialgleichung geht man besser von einer anderen aus [25]). Wir bilden für unsere Funktionen [25]) $\varphi(z, t)$, welche Lösungen von (21. 1) bei variablem t (jedoch denselben Funktionen λ, η) sind:

$$g(z, t) = \varphi(\varphi^{-1}(z, t), t_0)). \tag{22. 1}$$

Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\varphi(\varphi^{-1}(z, t), t_0) \cdot \frac{\partial \varphi^{-1}(z, t)}{\partial t}, \quad u = \varphi^{-1}(z, t),$$

und

$$\frac{\partial \varphi^{-1}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi^{-1}(z, t)}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial t},$$

somit

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u}\varphi(\varphi^{-1}(z, t), t_0) \cdot \frac{\partial \varphi^{-1}(z, t)}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial t}.$$

D. h. die durch (22. 1) bestimmte Funktion $g(z, t)$ genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} g(z, t) \cdot z \sum_1^p \lambda_\nu \frac{1 + \eta_\nu z}{1 - \eta_\nu z} \tag{22. 2}$$

mit der Anfangsbedingung $g(z, t_0) = z$, $g(z, 0) = \varphi(z, t_0)$. $\varphi(z, t)$ wie auch die Funktionen $g(z, t)$ liefern eine beschränkte q-fache Gabelschlitzabbildung, mit $q \leqq p$.

23. Wir führen die Funktionen

$$F(z) = \frac{\varphi}{\varphi'}, \quad G(z, t) = \frac{g}{g'}$$

ein und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(z, t) = -\frac{1}{\varphi'} \frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)} + \frac{\varphi}{\varphi'} \left(\frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)}\right)'. \tag{23. 1}$$

Dabei ist für die Funktion $f(z)$

$$\frac{f(z)}{f'(z)} = A(z) = z \sum_1^p \lambda_\nu \frac{1 + \eta_\nu z}{1 - \eta_\nu z}. \tag{23. 2}$$

Hingegen genügt die Funktion $G(z, t)$, wie man ebenso leicht sofort aus (22. 2) folgert, der bemerkenswerten Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} G(z, t) = A(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} G(z, t) - G(z, t) \cdot \frac{d}{dz} A(z); \quad A(z) = z \sum_1^p \lambda_\nu \frac{1 + \eta_\nu z}{1 - \eta_\nu z}. \tag{23. 3}$$

Von ihr wollen wir für die Integration unserer Differentialgleichung ausgehen. Es sei

$$G(z, t) = z\left(1 + 2\sum_2^\infty \gamma_\nu z^{\nu-1}\right), \quad A(z) = z\left(1 + 2\sum_2^\infty \alpha_\nu z^{\nu-1}\right), \quad \alpha_\nu = \sum_1^p \lambda_j \eta_j^{\nu-1}$$

---

[25]) Ähnlich wie in L. V. (8), S. 117.

gesetzt. Dann erhalten wir, wenn wir die Koeffizienten in (23. 3) links und rechts vergleichen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\gamma_2 = \gamma_2 - \alpha_2,\\
&\frac{d}{dt}\gamma_3 = 2(\gamma_3 - \alpha_3),\\
&\frac{d}{dt}\gamma_4 = 3(\gamma_4 - \alpha_4) + 2(\alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d}{dt}\gamma_n = (n-1)(\gamma_n - \alpha_n) + 2\sum_{2}^{n-1}(2\nu - n - 1)\gamma_\nu\alpha_{n+1-\nu}\,.
\end{aligned}
\tag{23. 4}
$$

Wir verzichten darauf, die allgemeine Integration, die durch schrittweise Quadraturen zu erreichen ist, auszuführen und hinzuschreiben und begnügen uns mit den ersten Koeffizienten. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\gamma_2(t) &= -\,e^t\int_{t_0}^{t} e^{-\tau}\alpha_2\,d\tau,\\
\gamma_3(t) &= -\,2e^{2t}\int_{t_0}^{t} e^{-2\tau}\alpha_3\,d\tau,\\
\gamma_4(t) &= e^{3t}\Big[-3\int_{t_0}^{t} e^{-3\tau}\alpha_4\,d\tau - 2\int_{t_0}^{t} e^{-2\tau_2}\alpha_3(\tau_2)\int_{\tau_2}^{t_0} e^{-\tau_1}\alpha_2(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2\\
&\qquad + 4\int_{t_0}^{t} e^{-\tau_2}\alpha_2(\tau_2)\int_{\tau_2}^{t_0} e^{-2\tau_1}\alpha_3(\tau_1)\,d\tau_1 d\tau_2\Big],\\
\beta_n &= \gamma_n(0).
\end{aligned}
\tag{23. 5}
$$

24. Wir vermerken noch folgenden

Satz 14. *Ist in demselben Intervall $0 \leqq t \leqq t_0$ eine Folge von Systemen von stetigen oder stückweise stetigen reellen Funktionen (mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen) gegeben:*

$$
\vartheta_k^{(\nu)}(t),\ \lambda_k^{(\nu)}(t) \geqq 0; \qquad k = 2, \ldots, n, \qquad \sum_{\varkappa=2}^{n}\lambda_\varkappa^{(\nu)} = 1, \qquad \nu = 1, \ldots,
$$

die im gesamten Intervall $0 \leqq t \leqq t_0$ gleichmäßig gegen ein System von stetigen oder stückweise stetigen Funktionen (mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen)

$$
\vartheta_k(t),\ \lambda_k(t) \qquad (k = 2, \ldots, n)
$$

konvergiert, so konvergiert wenigstens eine Teilfolge der Lösungen $\varphi_{(\nu)}(z, t_0)$ der zugehörigen Differentialgleichung gegen eine im Einheitskreis reguläre und schlichte Funktion $\varphi(z, t_0)$, welche Lösung der zu $\vartheta_k(t)$, $\lambda_k(t)$ gehörigen Differentialgleichung (21. 1) *ist.*

Dies folgt aus den beiden bereits erwähnten Tatsachen, daß

1. die Koeffizienten nacheinander durch Quadraturen erhältlich sind und der Reihe nach sämtlich konvergieren,

2. die Funktionen jeweils schlicht sind und eine Ableitung $\varphi'_{(\nu)}(0) = e^{-t_0} = \text{const.}$ haben; daher ist die Folge normal und ihre Grenzfunktion wieder schlicht.

V. Der Bereich $\mathfrak{B}_s^{(3)}$.

25. *Der reelle Variabilitätsbereich.* Wie wir schon einmal bemerkten, ist mit der Funktion $f(z) = \Sigma a_\nu z^\nu$ auch die Funktion $f^*(z) = \Sigma\bar{a}_\nu z^\nu$ im Einheitskreise schlicht

[denn wäre etwa $\Sigma\bar{a}_\nu z_1^\nu = \Sigma\bar{a}_\nu z_2^\nu$ für $z_1 \neq z_2$, $|z_1|, |z_2| < 1$, so wäre auch $\Sigma a_\nu \bar{z}_1^\nu = \Sigma a_\nu \bar{z}_2^\nu$ entgegen der Voraussetzung]. Dies bedeutet für den Bereich $\mathfrak{B}_s^{(n)}$, daß mit jedem Punkt $(\beta_2, \ldots, \beta_n)$ auch der Punkt $(\bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\beta}_n)$ darinnen liegt; der Bereich $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ hat also eine gewisse Symmetrie gegenüber der $(n-1)$-dimensionalen Achsenebene E^{n-1}:

$$\Im\beta_2 = \Im\beta_3 = \cdots = \Im\beta_n = 0.$$

E^{n-1} ist der reelle Koeffiziententeilraum. Den Durchschnitt unseres Bereiches $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ mit dieser Ebene E^{n-1} bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_s^{(n)}$ und nennen ihn den n-ten *reellen* Variabilitätsbereich, er hat also — um dies klar zu stellen — die folgende ihn charakterisierende Eigenschaft: Für jede im Einheitskreis reguläre und schlichte Funktion

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots$$

mit den n *reellen* Koeffizienten $1, a_2, \ldots, a_n$ ist der Punkt $(a_2, \ldots, a_n)$ im (abgeschlossenen) Bereich $\mathfrak{E}_s^{(n)}$ gelegen, und zu jedem Punkt aus ihm mit den (reellen) Koordinaten $(a_2, \ldots, a_n)$ gibt es eine Folge von (nicht notwendig reellen) Zahlen $a_{n+1}, \ldots$ so, daß die Funktion $f(z) = z + \sum_2^\infty a_\nu z^\nu$ im Einheitskreis regulär und schlicht ist.

26. *Die Haupteigenschaft von* $\mathfrak{E}_s^{(3)}$. Es gilt der

Satz 15. *Liegt ein Punkt* (β_2, β_3) *im Bereich* $\mathfrak{B}_s^{(3)}$ [*im Raume* $\Re$], *so ist auch der Punkt* $(\Re\beta_2, \Re\beta_3)$ *ein Punkt von* $\mathfrak{B}_s^{(3)}$ [*und damit von* $\mathfrak{E}_s^{(3)}$].

Beweis. Es genügt, den Satz für eine in $\mathfrak{B}_s^{(3)}$ überall dicht liegende Punktmenge (β_2, β_3) zu beweisen. Aus dem Löwnerschen Hauptsatz[25a]) folgt, daß diejenigen Punkte (β_2, β_3) in $\mathfrak{B}_s^{(3)}$ überall dicht liegen, für welche es eine stetige Funktion $\eta(\tau)$, $|\eta| = 1$, $0 \leqq \tau < \infty$ gibt derart, daß $\beta_2 = \int_0^\infty e^{-\tau}\eta\, d\tau$, $\beta_3 = \int_0^\infty e^{-2\tau}\eta^2 d\tau$ gilt. Hieraus ergibt sich für diese Punkte:

$$\Re\beta_2 = \int_0^\infty e^{-\tau} \cdot \tfrac{1}{2}(\eta + \bar{\eta})\, d\tau,$$

$$\Re\beta_3 = \int_0^\infty e^{-2\tau} \cdot \tfrac{1}{2}(\eta^2 + \bar{\eta}^2)\, d\tau.$$

Integrieren wir das Differentialgleichungssystem (21. 1) mit dem neuen System von Funktionen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad \bar{\eta}_1 = \eta_2 = \bar{\eta},$$

so ergibt sich nach Satz 13 eine schlichte Funktion

$$\varphi(z) = e^{-t_0}(z + a_2^0 z^2 + \cdots)$$

mit der Beziehung

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = z + 2\Re\beta_2 z^2 + 2\Re\beta_3 z^3 + 2\beta_4^* z^4 + \cdots, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Dies heißt aber, wenn wir uns des Satzes 14 bedienen, für jeden Punkt (β_2, β_3) aus $\mathfrak{E}_s^{(3)}$ gibt es eine konvergente Folge von iterierten Funktionen φ_k aus f_k^* mit *nur reellen* ersten zwei Koeffizienten so, daß $\beta_2^{(k)} \to \beta_2$, $\beta_3^{(k)} \to \beta_3$, d. h. wiederum, wenn wir

---

[25a]) L. V. (8).

uns der Bedeutung dieser Iteration erinnern und den Durchschnittsbereich des Bereiches $\mathfrak{B}_*^{(3)}$ mit der zweidimensionalen Achsenebene $\Im\beta_2 = \Im\beta_3 = 0$ mit $\mathfrak{E}_*^{(3)}$ bezeichnen, es gilt

Satz 16. *Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Gebiet $\mathfrak{G}$ in $\Im\beta_2 = \Im\beta_3 = 0$ mit dem genauen dritten reellen Variabilitätsbereich $\mathfrak{E}_s^{(3)}$ identisch ist, ist die Eigenschaft, daß von jedem Randpunkt von $\mathfrak{G}$ aus die Kurve $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$, die hier immer eine Parabel ist, ein Stück weit wenigstens nirgends ins Äußere dringt, wenn (σ) beliebig in $\mathfrak{E}_*^{(3)}$ variiert, und daß es das kleinste dieser Art ist* [26]).

27. *Herleitung des Bereiches $\mathfrak{E}_s^{(3)}$.* Hieraus können wir nun leicht den genauen Bereich $\mathfrak{E}_s^{(3)}$ bestimmen. (Im folgenden sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\beta_2 > 0$; wir schreiben auch die Koordinaten x, y für σ_2, σ_3 bzw. β_2, β_3).

Wir haben in (β) für die von ihm ausgehenden Kurven $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ die Richtungsvektoren (ξ_2, ξ_3):

$$\xi_2 = (\sigma_2 - \beta_2), \quad \xi_3 = 2(\sigma_3 - \beta_3),$$

wobei (σ_2, σ_3) beliebig auf dem Rand von $\mathfrak{E}_*^{(3)}$ variiere. $\mathfrak{E}_*^{(3)}$ ist (nach 12. 6) durch die Ungleichungen gegeben:

$$-1 \leqq x \leqq 1, \qquad 2x^2 - 1 \leqq y \leqq 1.$$

Dann berechnet [27]) man leicht die beiden extremalen Lagen der Richtungsvektoren dieses Büschels:

$$\mathfrak{x}_1 = \left(-1, -8\left(x - \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}}\right)\right), \quad \mathfrak{x}_2 = \left(-1, -8\left(x + \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}}\right)\right)$$

$$\text{für } y \geqq 8(x-1) + 1$$

(27. 1)

$$\mathfrak{x}_1 = \left(-1, -8\left(x - \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}}\right)\right), \quad \mathfrak{x}_2 = (-x+1, 2(-y+1))$$

$$\text{für } y \leqq 8(x-1) + 1.$$

Es zeigt sich leicht durch eine elementare Betrachtung des Richtungsfeldes und der Randbedingungen des Problems, daß für die Integration nur das Vektorfeld $\mathfrak{x}_1$ in Frage kommt.

Wir haben die Differentialgleichung

$$\boxed{y' = 8\left(x - \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}}\right)} \tag{27. 2}$$

zu integrieren mit der Randbedingung $y(1) = 1$, sowie mit $-1 \leqq y \leqq 1$ für $0 \leqq x \leqq 1$ [28]). Zu diesem Zweck führen wir die neue Funktion

$$\boxed{\eta(x) = \frac{x}{x - \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}}}} \tag{27. 3}$$

---

[26]) Nach früherer Schlußweise muß in jedem Randpunkt P eines stetig differentiierbaren Randteiles von $\mathfrak{E}_s^{(3)}$, der nicht Randpunkt von $\mathfrak{E}_*^{(3)}$ ist, sogar eine Iterationsparabel die Randkurve *berühren*.

[27]) Es genügt wegen $|\beta_3| < 1$ (s. Nr. **3**), $|\beta_2| < 1$, nur noch Punkte mit $0 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq y \leqq 1$ zu betrachten.

[28]) Siehe [27]). (Diese Bedingung schließt das Vektorfeld $\mathfrak{x}_2$ aus.)

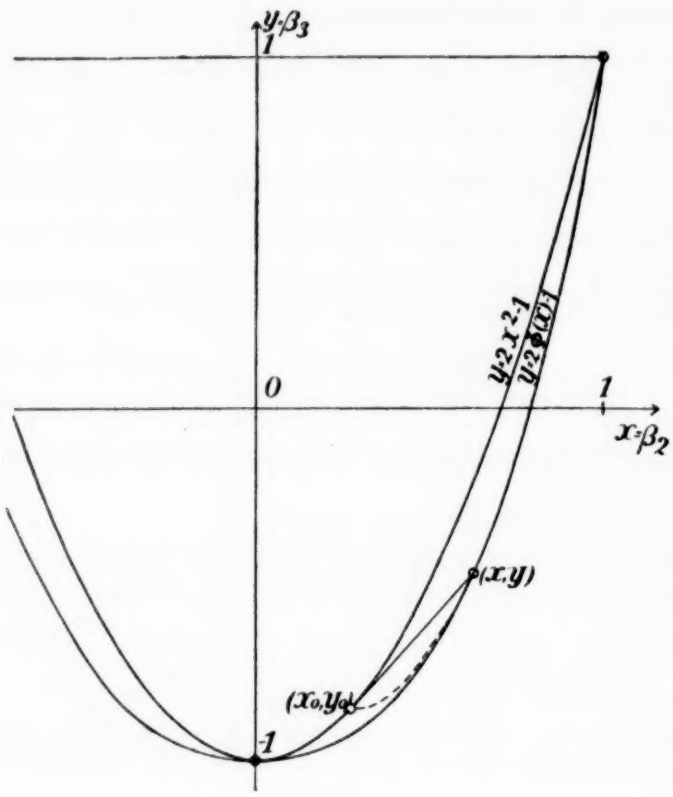

Fig. 2.

ein $\left(\text{im Äußern von } \mathfrak{E}_*^{(3)} \text{ ist } x^2 - \frac{y+1}{2} > 0\right)$ und erhalten aus (27. 2)

$$\eta'(x) = \frac{\eta(x)}{x(1-\eta(x))}.$$

Dies liefert aber $x = \gamma\eta e^{-\eta}$. Um die Konstante γ zu bestimmen, beachten wir die Randbedingung:

für $x \to 1$ gilt $y \to 1$, d. h. $\eta \to 1$.

Aus ihr folgt $\gamma = e$. Damit können wir nun die von uns gewünschte Kurve so schreiben: Es sei mit $\varphi(x)$ die im Intervall $0 < x \leqq 1$ eindeutig erklärte Umkehrfunktion von

$$(27.\,4) \qquad \boxed{x = \varphi e^{1-\varphi}}$$

mit $\varphi \geqq 1$ bezeichnet. Dann lautet die Gleichung der Integrationskurve, die unseren gesuchten Bereich $\mathfrak{E}_s^{(3)}$ berandet:

$$\frac{x}{x - \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}}} = \varphi(x)$$

oder:

$$(27.\,5) \qquad \frac{y+1}{2} = \frac{x^2}{\varphi^2(x)}\,(2\varphi(x) - 1) = \Phi(x).$$

Wir behaupten also: Der genaue Bereich $\mathfrak{E}_s^{(3)}$ ist umschrieben durch:

$$(27.\,6) \qquad \boxed{|x| \leqq 1, \quad 2\Phi(x) - 1 \leqq y \leqq 1},$$

worin $x = |\beta_2|$, $y = \beta_3$ und $\Phi(x)$ durch (27. 5) und (27. 4) erklärt ist.

Wir sehen unmittelbar, daß jede Iterationskurve (Parabel) [29]), von einem beliebigen Punkt von der Kurve (27. 5) ausgehend, nirgends ins Äußere des Bereiches (27. 6) dringt. Außerdem müssen wir uns noch überzeugen, daß diese Kurve das kleinste $\mathfrak{E}_*^{(3)}$ umfassende Gebiet berandet, das die Eigenschaft des Satzes 16 besitzt. Dies ist aber leicht einzusehen. Wir brauchen uns nur das Richtungsfeld $\mathfrak{r}_1$ in den Punkten im Innern von (27. 6), aber noch außerhalb $\mathfrak{E}_*^{(3)}$ anzusehen und können sagen, würde noch eine andere Randkurve vom Punkte $(0, -1)$ zum Punkte $(1, +1)$ in diesem Feld verlaufen, so fänden wir leicht in elementarer Betrachtung eine Stelle auf ihr, wo die ihr vorgeschriebene extremale Iterationsrichtung des Feldes ins Äußere führen würde.

28. Damit haben wir den

Satz 17. *Für jede in* $|z| < 1$ *reguläre und schlichte Funktion*

$$f(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots$$

gilt:

$$1 \geqq \Re\beta_3 \geqq 2\Phi(\Re\beta_2) - 1 \quad \textit{mit} \quad \beta_2 = -\frac{b_2}{2},\ \beta_3 = b_2^2 - b_3,$$

worin $\Phi(x)$ *für* $-1 \leqq x \leqq 1$ *durch* (27. 4) *und* (27. 5) *definiert ist.*

---

[29]) $X(t) = xe^{-t} + (1-e^{-t})\,x_0$, $Y(t) = ye^{-2t} + (1-e^{-2t})\,y_0$; x_0, y_0 in $\mathfrak{E}_*^3$, $e^{-t} = \alpha$.

Zugleich ist diese Abschätzung für $\Re\beta_2$, $\Re\beta_3$ scharf [30]), *d. h. zu jedem Paar reeller β_2, β_3, das diese Ungleichung erfüllt, gibt es wenigstens eine in $|z| < 1$ reguläre schlichte Funktion*

$$f(z) = z - 2\beta_2 z^2 + (4\beta_2^2 - \beta_3) z^3 + \cdots.$$

Damit ist gleichzeitig gezeigt, daß die *Berandungsfläche* des genauen dritten Variabilitätsbereiches $\mathfrak{B}_e^{(3)}$ *keine algebraische Fläche* ist. Ihr Schnitt mit $\Im\beta_2 = \Im\beta_3 = 0$ ist nämlich zum einen Teil die transzendente Kurve

$$y = 2\Phi(x) - 1 = -1 + \frac{x^2}{\varphi^2}(2\varphi - 1) \quad \text{mit} \quad \varphi e^{1-\varphi} = x \text{ [31])}.$$

29. *Herleitung der Ungleichung von Fekete und Szegö.* Aus dem Satz 17 können wir unmittelbar eine Bestätigung eines Resultates von Fekete und Szegö [32]) herleiten. Wir fragen nach der bestmöglichen Abschätzung des Maximums des absoluten Betrages des Koeffizienten b_5 einer in $|z| < 1$ regulären schlichten ungeraden Funktion $f(z) = z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \cdots$. Zu einer beliebigen solchen Funktion gibt es bekanntlich immer eine im Einheitskreis reguläre schlichte Funktion $F(z) = z + B_2 z^2 + \cdots$ so, daß die Beziehung $f(z) = \sqrt{F(z^2)}$ besteht.

Es ist dabei $b_3 = \frac{B_2}{2}$, $b_5 = \frac{1}{2}\left(B_3 - \frac{B_2^2}{4}\right)$, und die Frage läuft darauf hinaus, das Maximum von $\left|\frac{1}{2}\left(B_3 - \frac{B_2^2}{4}\right)\right|$ für beliebige schlichte Funktionen $F(z)$ zu bestimmen.

Es ist aber

$$\operatorname{Max} |2b_5| = \operatorname{Max} \Re\left(B_3 - \frac{B_2^2}{4}\right)$$

und, wenn man wie oben, $B_2 = -2\beta_2$, $B_3 = 4\beta_2^2 - \beta_3$ setzt,

$$\begin{aligned}\Re\left(B_3 - \frac{B_2^2}{4}\right) &= \Re(3\beta_2^2 - \beta_3) = 3(\Re\beta_2)^2 - 3(\Im\beta_2)^2 - \Re\beta_3 \\ &\leqq 3(\Re\beta_2)^2 - \Re\beta_3 \\ &\leqq 3x^2 - 2\Phi(x) + 1 \equiv H(x),\end{aligned}$$

mit $x = \Re\beta_2$ und $-1 \leqq x \leqq +1$.

Wir suchen von $H(x)$ das Maximum für $0 < x \leqq 1$ [33]). Man findet

$$\frac{d}{dx} H(x) = 2x\left(3 - \frac{4}{\varphi(x)}\right)$$

und erkennt, daß $H(x)$ für $\varphi = \frac{4}{3}$, d. h. $x_0 = \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}}$ das Maximum annimmt. Es folgt also $|2b_5| \leqq H(x_0) = 2e^{-\frac{2}{3}} + 1$, und dies ist das Resultat von Fekete und Szegö. Gleichzeitig sehen wir, daß die Abschätzung wirklich scharf ist. Denn sie wird wirklich erreicht von $\beta_2 = \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}}$, $\beta_3 = 2\Phi(x_0) - 1 = \frac{10}{3} e^{-\frac{2}{3}} - 1$, und diese Koeffizienten entsprechen einem Punkte am Rande unseres genauen reellen Bereiches $\mathfrak{E}_e^{(3)}$.

---

[30]) und damit auch für reelle b_2, b_3.

[31]) Eine dem widersprechende Bemerkung in L. V. (1), die sich übrigens in der dort zitierten Literatur L. V. (4) nicht findet, ist damit hinfällig.

[32]) Siehe L. V. (14).

[33]) Es ist ja $\Phi(x) = \Phi(-x)$.

30. *Abschätzung des Bereiches $\mathfrak{B}_s^{(3)}$ von innen her.* Wie steht es mit dem genauen Bereich des dritten Koeffizienten β_3? Wir wollen ihn durch Iteration auszuschöpfen suchen. Sei β_2 reell [34]), $\Re\beta_3 = y$, $\Im\beta_3 = z$. Zunächst können wir in jeder Ebene $\frac{1-y}{z} = \operatorname{ctg}\delta$, $\Im\beta_2 = 0$, die unseren Bereich $\mathfrak{B}_*^{(3)}$ im Gebiet $2(x^2-1) \leqq \frac{y-1}{\cos\delta} \leqq 0$ schneidet, bei den Iterationen in dieser Ebene selbst bleiben und erhalten dann genau dasselbe zu integrierende Richtungsfeld wie oben, nur alles mit der Transformation:

$$x^* = x, \quad y^* - 1 = (y-1)\cos\delta \qquad (z = (1-y)\operatorname{tg}\delta).$$

Wir bekommen nach denselben Überlegungen wie vorhin hier als Grenzbereich der Koeffizienten, bei allen möglichen Iterationen, solange wir bei der Iteration *in der Ebene* $\frac{1-y}{z} = \operatorname{ctg}\delta$ bleiben, den Bereich

$$2(\Phi(x)-1) \leqq \frac{y-1}{\cos\delta} \leqq 0, \qquad |\delta| < \frac{\pi}{2},$$

und haben damit auf jeden Fall folgenden Bereich $\mathfrak{B}_1$ gefunden:

$$(30.1) \qquad \mathfrak{B}_1: \quad |y + iz - \Phi(x)| \leqq 1 - \Phi(x)$$

und für ihn bewiesen:

$$\mathfrak{B}_1 \leqq \mathfrak{B}_s^{(3)}.$$

Wir könnten für diesen Bereich $\mathfrak{B}_1$ sogar zeigen, daß man bei beliebigen Iterationen mit *reellen* β_2 und σ_2 [35]) nirgends aus dem Bereich $\mathfrak{B}_1$ herauskommt. (Wir wollen jedoch diesen Beweis hier nicht erbringen.) Trotzdem zeigt sich, daß $\mathfrak{B}_1$ nicht der genaue Bereich ist, sondern daß der Bereich $\mathfrak{B}_s^{(3)}$ über $\mathfrak{B}_1$ hinausragt.

31. Dies wollen wir kurz zeigen:

Der volle vierdimensionale Bereich $\mathfrak{B}_1^4$ [36]) hat in Parameterdarstellung die Begrenzungsfläche:

$$\mathfrak{F}: \qquad \mathfrak{x} = \begin{cases} x = x_0 e^{i\vartheta} \\ y + iz = (y_0 + iz_0)e^{2i\vartheta} \end{cases}$$

mit $y_0 + iz_0 = \Phi(x_0) - (1 - \Phi(x_0))\, e^{-2i\delta}$ und $0 \leqq x_0 \leqq 1,\ 0 \leqq \vartheta, \delta \leqq 2\pi$.

Die Berandung von $\mathfrak{B}_*^{(3)}$ schreibt sich:

$$\mathfrak{F}^*: \qquad \mathfrak{x}^* = \begin{cases} \xi = \xi_0 e^{i\lambda} \\ \eta + i\zeta = (\eta_0 + i\zeta_0)\, e^{2i\lambda} \end{cases}$$

mit $\eta_0 + i\zeta_0 = \xi_0^2 - (1 - \xi_0^2)\, e^{-2i\beta}$ und $0 \leqq \xi_0 \leqq 1,\ 0 \leqq \beta, \lambda \leqq 2\pi$.

Es sei für das folgende x wieder reell, d. h. $\vartheta = 0$, jedoch ξ beliebig.

Wir spannen die Tangentialvektorenmannigfaltigkeit an $\mathfrak{F}$ durch die drei Vektoren

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x_0} = (1, (1 + e^{-2i\delta})\Phi'), \qquad \mathfrak{x}_2 = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \delta} = (0, (1-\Phi)2ie^{-2i\delta}),$$

$$\mathfrak{x}_3 = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \vartheta}\bigg|_{\vartheta=0} = (ix_0,\ 2i(y_0 + iz_0))$$

---

[34]) Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit.

[35]) in der Bezeichnung von Nr. **23**.

[36]) den man aus $\mathfrak{B}_1$ erhält durch die Gruppe:

$$x = x_0 e^{i\vartheta}, \quad y + iz = (y_0 + iz_0)\, e^{2i\vartheta}, \quad 0 \leqq \vartheta < 2\pi.$$

auf. Fügen wir noch den vierten Vektor $\mathfrak{x}_4 = (\xi - x,\ 2(\eta + i\zeta) - 2(y + iz))$ der Anfangsrichtung der Iterationskurve hinzu, so ist der Wert der Determinante $D = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4)$ [worin also für $\mathfrak{x}_\lambda = (u_\lambda, v_\lambda)$ die betreffende Spalte

$$\begin{pmatrix} \Re u_\lambda \\ \Im u_\lambda \\ \Re v_\lambda \\ \Im v_\lambda \end{pmatrix}$$

lautet] z. B. für $\delta = \beta = \lambda = 0$

$$D = -4x_0(1 - \Phi)[(\xi_0 - x_0)\Phi' + (2\Phi - 1) - (2\xi_0^2 - 1)] \geqq 0$$

und sicher für gewisse x_0, ξ_0 positiv.

Wäre unser Bereich der genaue Variabilitätsbereich, so müßte die Iterationsrichtung immer ins Innere zeigen oder höchstens die Randfläche tangieren. D. h. aber, es müßte für alle (x, y), (ξ, η) unsere Determinante $D \geqq 0$ sein, solange $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ linear unabhängig sind [37]) und daher ihren Schraubensinn nicht ändern können.

Es ist

$$\frac{2}{1 - \Phi} D = A \cos 2\delta + B \sin 2\delta + C$$

mit

$$A = -x_0[(\xi_0 \cos\lambda - x_0)\Phi' + 2\Phi - 2\xi_0^2 \cos 2\lambda],$$
$$B = -2 \sin\lambda[2x_0\xi_0^2 \cos\lambda - \xi_0\Phi],$$
$$C = -x_0[2(\Phi - 1) + 4\cos^2\lambda(1 - \xi_0^2) - 2(1 - \xi_0^2) + \Phi'(\xi_0 \cos\lambda - x_0)].$$

Dann müßte aber auch noch

$$\Delta = \operatorname*{Min}_{0 \leqq \delta < 2\pi} \frac{2}{1 - \Phi} D \geqq 0$$

sein. Es ist $\Delta = C - \sqrt{A^2 + B^2}$. Es müßte also $A^2 + B^2 \leqq C^2$ sein. Setzen wir

$$\omega = (\xi_0 \cos\lambda - x_0)\Phi' + (2\Phi - 1) - 2\xi_0^2 \cos^2\lambda + 1,$$

so ist

$$A = -x_0(\omega - 2\xi_0^2(\cos^2\lambda - 1)),$$
$$C = -x_0(\omega + 2(\xi^2 - 2)\sin^2\lambda),$$
$$C^2 - (A^2 + B^2) = 4\sin^2\lambda[-2\omega x_0^2 - 4x_0^2(1 - \xi_0^2)\sin^2\lambda - \xi_0^2(\Phi - 2x_0\xi_0\cos\lambda)^2].$$

Nun kann man aber bei fest gegebenem $x_0 \neq 0$ den Wert von $\xi_0 \cos\lambda$ so wählen, daß $\omega = 0$ wird, dazu ist nur nötig,

$$\xi_0 \cos\lambda = x_0 - \sqrt{x_0^2 - \Phi}$$

zu nehmen.

Dabei werden aber die zwei übrigen Terme in der Klammer nicht $= 0$, d. h. es gibt gewisse Werte (x, y, z), (ξ, η, ζ) so, daß $\varphi - (A^2 + B^2) < 0$ wird.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_2$ den Bereich $|\beta_3| \leqq 1$, $\Re\beta_3 \geqq 2\Phi(\Re\beta_2) - 1$, so haben wir damit gezeigt:

$$\mathfrak{B}_1^4 < \mathfrak{B}_s^{(3)} \leqq \mathfrak{B}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_1^4 \neq \mathfrak{B}_s^{(3)}.$$

---

[37]) eine leichte Rechnung zeigt, daß dies für $x_0 \neq 0, \neq 1$, $y_0 \neq 1$ der Fall ist.

32. *Die Schrankenfunktionen zu* $\mathfrak{E}_s^{(3)}$. Wir wollen noch die *Schrankenfunktionen* aufstellen, d. h. solche im Einheitskreis schlichte und reguläre Funktionen suchen, für welche die Koeffizienten β_2, β_3 reell und auf dem Rande von $\mathfrak{E}_s^{(3)}$ gelegen sind.

(1) Für den einen Teil des Randes $-1 \leqq \beta_2 \leqq 1$, $\beta_3 = +1$, gibt es elementare Schrankenfunktionen. Setzen wir die Abbildungen

$$w = \frac{z}{(1+z)^2} \quad \text{und} \quad w^* = \frac{\lambda w}{1 - 2\lambda w}, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 2,$$

zusammen, so erhalten wir die im Einheitskreis reguläre und schlichte Funktion

$$w^* = f(z) = \frac{z}{1 + 2(1-\lambda)z + z^2} = z - 2(1-\lambda)z^2 + (4(1-\lambda)^2 - 1)z^3 + \cdots$$

mit

$$\beta_2 = -\frac{b_2}{2} = 1 - \lambda, \quad \beta_3 = b_2^2 - b_3 = 1.$$

(2) Für den anderen Teil des Randes (den wir nur für $0 \leqq \beta_2$ zu betrachten brauchen):

$$\beta_3 = 2\Phi(\beta_2) - 1, \quad 0 \leqq \beta_2 \leqq 1,$$

stellen wir folgende Überlegung an. Wir suchen eine stetig eingliedrige Schar von im Einheitskreis regulären Funktionen $f(z, \tau) = z + \cdots$, $\tau \geqq 0$ reell, welche für $\tau = 0$ sich auf $f(z, 0) = \dfrac{z}{(1+z)^2}$ reduzieren, und welche man auseinander durch infinitesimale zweifache Radialschlitz-Iteration erhalten kann. Sei $f(z, \tau) = z + \cdots$ eine Funktion aus der Schar, so wollen wir aus ihr eine neue herleiten:

$$F(z, \tau, t) = e^t f(S^{-1}(e^{-t}S)) \text{ mit } \frac{S}{S'} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{1 + \eta_j z}{1 - \eta_j z}, \ \sum_{j=1}^{2} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \geqq 0, \ |\eta_j| = 1.$$

Wir berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(z, \tau, t)|_{t=0} = f(z, \tau) - f'(z, \tau) \cdot \sum_{1}^{2} \lambda_j \frac{1 + \eta_j z}{1 - \eta_j z}.$$

Denken wir uns die Funktionen unserer Schar nacheinander durch infinitesimale Iterationen *dieser Art* auseinander entstehen, so werden wir zunächst rein heuristisch zu folgender Differentialgleichung geführt:

$$\text{(32. 1)} \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} f(z, \tau) = f(z, \tau) - \frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) \cdot \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{1 + \eta_j z}{1 - \eta_j z}.$$

Da für eine beliebige im Einheitskreis schlichte reguläre Funktion $f(z) = z + \cdots$ die Funktionen $f(z, \tau) = e^t f(S^{-1}(e^{-\tau}S))$ mit *konstanten* λ_j, η_j eine *Lösung der Differentialgleichung* (32. 1) sind, so zeigt man leicht, daß jede Lösung von (32. 1), worin λ_j, η_j beliebige stetige Funktionen von τ, $0 \leqq \tau \leqq \tau_0$, sind und $f(z, 0) = z + \cdots$ eine schlichte reguläre Funktion ist, für jedes τ, $0 \leqq \tau \leqq \tau_0$, sich durch eine Folge von n-fachen Iterierten der Form

$$e^{\tau_1 + \cdots + \tau_n} f(s_1(\cdots s_n(z) \cdots), \qquad s_\nu(z) = S^{-1}(e^{-\tau_\nu}S), \quad \frac{S}{S'} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j^{(\nu)} \frac{1 + \eta_j^{(\nu)} z}{1 - \eta_j^{(\nu)} z}$$

beliebig genau approximieren läßt [38]). Wendet man noch bekannte Sätze über Schlichtheit und normale Funktionenfolgen an, so ergibt sich der

Satz 18. *Sind für* $0 \leqq \tau \leqq \tau_0$ *die in* (32. 1) *auftretenden Funktionen* λ_j, η_j *als beliebige stetige Funktionen von* τ ($\Sigma \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geqq 0$, $|\eta_j| = 1$) *vorgegeben und ist* $f(z) = z + \cdots$ *eine beliebige im Einheitskreis reguläre schlichte Funktion, so ist jede Lösung der Differentialgleichung für* $0 \leqq \tau \leqq \tau_0$, *mit* $f(z, 0) = f(z)$, *eine im Einheitskreis reguläre schlichte Funktion* [39]).

Wir wählen für unsere Zwecke $f(z, 0) = \dfrac{z}{(1+z)^2}$,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \tfrac{1}{2}, \quad \eta_1 = \overline{\eta}_2 = \eta(\tau) = e^{i\vartheta(\tau)}. \tag{32. 2}$$

Wir erhalten für die Koeffizienten der Lösung $f(z, \tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\tau)\, z^\nu$ die Werte

$$b_0(\tau) = 0, \quad b_1(\tau) = 1 \text{ für alle } 0 \leqq \tau \leqq \tau_0,$$

ferner, wenn wir die Ableitungen nach τ mit Punkten bezeichnen:

$$\dot{b}_2 = -\, b_2 - 2\cos\vartheta,$$

$$\dot{b}_3 = -\, 2b_3 - 4b_2\cos\vartheta - 2\cos 2\vartheta,$$

$$\dot{\beta}_2 = -\,\frac{\dot{b}_2}{2} = -\,\beta_2 + \cos\vartheta,$$

$$\dot{\beta}_3 = (b_2^2 - b_3) = -\,2\beta_3 + 2\cos 2\vartheta$$

und durch Integration (mit den Anfangsbedingungen $\beta_2(0) = \beta_3(0) = 1$):

$$e^\tau \beta_2(\tau) - 1 = \int_0^\tau e^\tau \cos\vartheta\, d\tau,$$

$$e^{2\tau}\beta_3(\tau) - 1 = 2\int_0^\tau e^{2\tau}\cos 2\vartheta\, d\tau.$$

Wir setzen speziell:

$$\boxed{\cos\vartheta = e^{-\tau}.} \tag{32. 3}$$

(Dies wird durch die Betrachtung der *extremalen* Richtung der infinitesimalen Iteration nahe gelegt. Schreiben wir nämlich

$$\frac{f}{f'} = z + 2\sum_2^\infty \beta_\nu z^\nu, \qquad \frac{S}{S'} = z + 2\sum_2^\infty \cos(\nu - 1)\vartheta\, z^\nu,$$

$$F(z, t) = e^t f(S^{-1}(e^{-t}S)), \qquad \frac{F}{F'} = z + 2\sum_2^\infty B_\nu z^\nu,$$

so erhalten wir im Anschluß an die Betrachtungen in Nr. **27** für die extremale Iterationsrichtung für einen Punkt am Rande des Bereiches ($t = 0$), wenn wir $\cos\vartheta = \sigma$ setzen:

$$\sigma = \beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3 + 1}{2}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d}{dt}B_2\right)_{t=0} = -\sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3+1}{2}},$$

---

[38]) Vergleiche den Beweis in Nr. **2**.

[39]) Natürlich läßt sich dieser Satz wörtlich für beliebig p-fache Radialschlitz-Iterationen aussprechen und beweisen (mit denselben Formeln, in denen nur $j = 1, \ldots, p$ läuft). Doch haben wir an dieser Stelle kein Interesse daran.

und hieraus unter Benutzung der Gleichung $\beta_3 = 2\Phi(\beta_2) - 1$ sowie der zu postulierenden Relation $d\beta = \left(\frac{d}{dt} B_2\right)_{t=0} dt$:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\beta_2}{\sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3 + 1}{2}}} = -\, dt, \qquad \sigma = e^{-t}.)$$

Mit (32. 3) wird nun

$$\beta_2 = (1 + \tau)\, e^{-\tau}, \qquad \dot{\beta}_2 = -\, \tau e^{-\tau}.$$
$$\beta_3 = 2(1 + 2\tau)\, e^{-2\tau} - 1, \qquad \dot{\beta}_3 = -\, 8\tau e^{-2\tau}.$$

Man berechnet ferner:

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{\dot{\beta}_3}{\dot{\beta}_2} = 8e^{-\tau}, \quad \beta_2^2 - \frac{\beta_3 + 1}{2} = \tau^2 e^{-2\tau}, \quad \beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3 + 1}{2}} = e^{-\tau}.$$

Also ist die Differentialgleichung (27. 2) erfüllt und weil diese (bei positiv genommener Wurzel) für die Anfangsbedingungen $\beta_2 = \beta_3 = 1$ nur eine Lösung hat, so ist:

$$\beta_3 = 2\Phi(\beta_2) - 1.$$

Wir haben damit, wenn wir noch in (32. 1) die speziellen Werte (32. 2) und $\cos\vartheta = e^{-\tau}$ einsetzen, sowie den neuen Parameter

$$\sigma = \cos\vartheta = e^{-\tau}, \qquad 0 < \sigma \leqq 1,$$

einführen, das *Ergebnis*: Die für jedes σ, $0 < \sigma \leqq 1$, eindeutig bestimmte Lösung $f(z, \sigma) = z + b_2 z^2 + \cdots$ der partiellen Differentialgleichung:

(32. 4)
$$\boxed{\sigma f_\sigma - f_z \frac{z(1 - z^2)}{1 - 2\sigma z + z^2} + f = 0}$$

mit der Anfangsbedingung $f(z, 1) = \frac{z}{(1 + z)^2}$ $(\sigma = 1)$, ist erstens eine im Einheitskreis reguläre und schlichte Funktion, und zweitens gelten für sie die Gleichungen:

$$-\frac{b_2}{2} = \beta_2 = (1 - \lg\sigma)\,\sigma \qquad (\sigma = e^{-\tau}),$$
$$b_2^2 - b_3 = \beta_3 = 2(1 - 2\lg\sigma)\,\sigma^2 - 1 = 2\Phi(\beta_2) - 1,$$

d. h. sie ist für jedes σ *Schrankenfunktion* für den unter (2) betrachteten Teil des Randes von $\mathfrak{E}_z^{(3)}$.

33. *Integration von* (32.4). Die Differentialgleichung (32. 4) läßt sich durch Quadraturen lösen; man hat als Gleichungssystem für die Charakteristiken ($e^F = H$ gesetzt):

(33. 1)
$$\frac{d\sigma}{dH} = -\, \sigma,$$

(33. 2)
$$z(z^2 - 1)\frac{d\sigma}{dz} = \sigma(1 - 2\sigma z + z^2);$$

letztere liefert eine lineare Differentialgleichung für $\varkappa = \frac{1}{\sigma}$:

$$z(z^2 - 1)\,\varkappa' + (1 + z^2)\,\varkappa - 2z = 0, \qquad \varkappa' = \frac{d\varkappa}{dz}.$$

Hieraus erhalten wir

$$(\log v \equiv)\ \frac{1 - z^2}{\sigma z} + 2\log z = \text{const.}$$

Aus (33. 1) folgt

$$\sigma \cdot e^{H} = \text{const.}$$

Aus diesen beiden unabhängigen Integralen setzen wir unsere Lösung zusammen:

$$\sigma F - \psi(v) = 0. \tag{33. 3}$$

$\sigma = 1$ liefert die Bedingung

$$\frac{z}{(1+z)^2} = \psi\left(z^2 e^{\frac{1-z^2}{z}}\right), \tag{33. 4}$$

d. h. für die Umkehrfunktion $\psi^{-1} = \varphi$ ist, wenn wir $\frac{z}{(1+z)^2} = \zeta$ setzen:

$$\varphi(\zeta) = z^2 \cdot e^{\frac{1-z^2}{z}} = \frac{1}{2\zeta^2}\left[1 - 4\zeta + 2\zeta^2 - (1-2\zeta)\sqrt{1-4\zeta}\right] e^{\frac{\sqrt{1-4\zeta}}{\zeta}}.$$

Damit ist auch $\psi(v)$ bekannt, wir erhalten schließlich aus (33. 3) die Schrankenfunktion $(0 < \sigma \leqq 1)$:

$$F(z,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\psi\left(z^2 e^{\frac{1-z^2}{\sigma z}}\right) = z - 2(1 - \lg\sigma)\sigma z^2 + (2(1 - 2\lg\sigma + 2(\lg\sigma)^2)\sigma^2 + 1)z^3 + \cdots.$$

(Für $(\beta_2, \beta_3) = (0, -1)$ genügt es, $\frac{z}{1+z^2} = z - z^3 + \cdots$ zu betrachten.)

Literaturverzeichnis.

1. Zusammenfassende Darstellungen:

(1) L. Bieberbach, Neuere Untersuchungen in der Theorie der konformen Abbildung, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II, 3, 1, 382—532.

(2) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie **2**, Leipzig 1931.

(3) P. Montel-F. Marty, Leçons sur les fonctions univalentes, Paris 1933.

2. Einzeldarstellungen (bis etwa Anfang 1935), vor allem:

(4) L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitz. Ber. Berliner Akademie 1916, 941—955.

(5) L. Bieberbach, Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, Rendic. Palermo **38** (1914), 98—112.

(6) C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rendiconti Palermo **32** (1911), 1—25.

(7) J. Dieudonné, Recherches sur quelques problèmes rélatifs aux polynomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe, Annales de l'Ecole Normale supérieure **58** (1931), 247—358.

(8) K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math. Ann. **89** (1923), 103—121.

(9) W. Rogosinski, Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen, Mathematische Zeitschrift **35** (1932), 93—121.

sowie:

(10) L. Bieberbach, Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildungen, Math. Annalen **77** (1916), 153—172.

(11) L. Bieberbach, Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen, Math. Zeitschrift **4** (1919), 295—305.

(12) L. Bieberbach, Zur Theorie der schlichten Abbildungen, Bull. of the Calcutta Math. Soc. **20** (1928), 17—20.

(13) G. Faber, Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen Satzes über konforme Abbildung, Sitz.-Ber. Akademie München 1916, 39—42.

(14) M. Fekete-G. Szegö, Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen, Journal London Math. Soc. **8** (1933), 85—89.

(15) Grandjot, siehe (32).

(16) H. Grunsky, Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche, Schriften des math. Seminars u. des Institutes für angewandte Mathematik der Universität Berlin **1** (1932), 95—140.
(17) H. Grunsky, Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung, Jahresber. d. D. M. V. **43** (1934), 140.
(17a) G. Koenigs, Sur les intégrales de certaines équations fonctionelles, Annales de l'Ecole Normale (3) **1** (1884), Supplément.
(18) E. Landau, Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten, Math. Zeitschr. **30** (1929), 608—634.
(19) E. Landau, Über ungerade schlichte Funktionen, Math. Zeitschr. **37** (1933), 33—35.
(20) V. Lewin, Ein Beitrag zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen, Math. Zeitschr. **38** (1934), 307—311.
(21) V. Lewin, Über die Koeffizientensummen einiger Klassen von Potenzreihen, Math. Zeitschr. **38** (1934), 565—590.
(22) A. Marx, Untersuchungen über schlichte Abbildungen, Math. Annalen **107** (1932), 49.
(23) Paley-Little, A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients, Journal of London Math. Soc. **7** (1932), 167—169.
(24) G. Pick, Über den Koebeschen Verzerrungssatz, Leipziger Berichte **68** (1916), 58—64.
(25) G. Pick, Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet, Wiener Berichte (Abtlg. IIa) **126** (1917), 47—263 (1—17).
(26) Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis **2** (Berlin 1925), 4. Abschnitt, 2. Kapitel.
(27) H. Prawitz, Über Mittelwerte analytischer Funktionen, Arkiv for Mathematik, Astronomi och Fysik **20** (1927/28) Nr. 6, S. 8.
(28) J. Privaloff, Sur les fonctions qui donnent la représentation conforme bi-univoque, Recueil soc. math. de Moscon **31** (1924), 350—365 (russisch mit französischem Auszug).
(29) L. Spaček, Contribution à la théorie des fonctions univalentes, Časopis pro pěstovani matematiky a fysiky **62** (1932), 12.
(30) E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie **2** (Konforme Abbildung einfachzusammenhängender Bereiche), Leipzig 1913 (bes. S. 109).
(31) Strohhäcker, Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen, Math. Zeitschrift **37** (1934), 372.
(32) Szegö, Zur Theorie der schlichten Abbildungen, Math. Annalen **100** (1928), 188—211 (hierin auch Beitrag von Grandjot).

Das Literaturverzeichnis macht keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Vor allem sei deswegen noch einmal auf (3), sowie für die ältere Literatur auf (1) verwiesen.

Eingegangen 10. Juni 1936.

Zur Differentialgeometrie k-dimensionaler Gebilde im R_n.

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

Einleitung.

Eine der ersten Fragen in der, von einer Ordnungsdefinition aus orientierten, Strukturtheorie reeller Gebilde ist die nach den ordnungshomogenen Bestandteilen. Bei den Kurven darf diese Frage für eine Anzahl der in Betracht kommenden Fälle als im wesentlichen erledigt gelten [1]). Für Gebilde höherer Dimension ist dagegen in dieser Richtung bis jetzt noch wenig bekannt. Die folgenden Zeilen wollen einen ersten Beitrag zu diesen letzteren Problemen liefern [2]).

In einer vorangehenden Arbeit [3]) war für den Fall der Kurven und $(n-1)$-dimensionalen Hyperflächen im (projektiven) R_n folgende Frage behandelt worden: *Welche Einschränkungen bezüglich der lokalen Ordnung zieht die Voraussetzung hinreichend oftmaliger Differenzierbarkeit nach sich?* Es zeigte sich, daß — jeweils bis auf eine nirgends dichte Punktmenge — die Ordnung eines jeden Punktes bei Kurven gleich n, bei (Hyper-) Flächen, abgesehen von einer Klasse wohl definierter Ausnahmeflächen, mindestens gleich 2 und höchstens gleich n ist. M. a. W.: Die ordnungshomogenen Teilbogen sind von der Ordnung n, die ordnungshomogenen Hyperflächenstücke von höchstens der Ordnung n. Diese Tatsache, daß nämlich — mindestens unter gewissen Differenzierbarkeitsbedingungen — die bei ordnungshomogenen Gebilden möglichen Ordnungen sehr wenig zahlreich sind, ergab eine erste Rechtfertigung des Begriffes „ordnungshomogen", jedenfalls für Kurven und (Hyper-)Flächen.

Schon seinerzeit wurde darauf hingewiesen, daß die soeben erwähnte Frage als Spezialfall in der folgenden enthalten sei: Gegeben sei im R_n mit $n \geqq 2$ ein „*k-dimensionales Flächenstück*" F_k (ein eindeutiges stetiges Bild eines k-dimensionalen Würfels) mit $1 \leqq k \leqq n-1$. Wir definieren die (hier stets beschränkte) *Ordnung* von F_k als maximale Mächtigkeit des Durchschnittes des F_k mit den linearen, $(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten L_{n-k} (jeder Punkt des Durchschnittes braucht für unsere Zwecke nur einfach gezählt zu werden); *dabei darf aber von einer gewissen* (später (vgl. Nr. 1, 21) noch zu definierenden) *im Raume aller L_{n-k} nirgends dichten* (*abgeschlossenen*) *Menge von L_{n-k}*

---

[1]) Vgl. O. Haupt, Strukturprobleme bei reellen Gebilden, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., 1935, S. 183ff.

[2]) Vgl. eine Voranzeige der in vorliegender Arbeit erhaltenen Ergebnisse, Sitz.-Ber. d. phys.-med. Soz. Erlangen **65** (1934), S. 95/96.

[3]) O. Haupt, Zur Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, Crelles Journal **169** (1933), S. 177ff. — Zu Seite 185, Zeile 1 bis 4 von unten ist zu ergänzen: Hat man *allgemein* eine „geradlinige" Hyperfläche $x_\nu = p_\nu(t_1, \ldots, t_{n-2}) + tq_\nu(t_1, \ldots, t_{n-2})$, $\nu = 1, \ldots, n$, (welche die Darstellung $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ gestattet), so folgt unter den entsprechenden Differenzierbarkeitsbedingungen wieder $\Phi_\nu = 0$.

abgesehen werden. Die Vernachlässigung solcher Ausnahmemengen bei der Ordnungsdefinition liegt durchaus in der Natur der Sache. In der Tat wird man schon im Falle der ebenen Kurven letzten Endes zu derartigen Maßnahmen veranlaßt: falls nämlich die Ordnung als maximale *Schnitt*punktzahl definiert wird, also zunächst diejenigen Geraden, welche Stützpunkte oder geradlinige Teilbogen tragen, ausgeschlossen bzw. erst hinterher durch geeignete Festsetzungen einbezogen werden. Gefragt wird: Welche Ordnungen können bei ordnungshomogenen F_k auftreten, sobald nur über die F_k gewisse (später genau anzugebende) Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gemacht werden?

Diese Frage wird nachstehend beantwortet. Zunächst (§ 1) werden wir Beispiele von F_k angeben, welche ordnungshomogen sind von einer Ordnung m und wobei m irgendeiner der ganzen Zahlen $(n-k+1)$, $(n-k+2)$, . . ., $(k(n-k)+1)$ gleich sein darf $(2 \leqq n,\ 1 \leqq k \leqq n-1)$. Diese Beispiele sind sogar *algebraisch*; genauer gesagt sind die Koordinaten x_ν der Punkte dieser F_k darstellbar als *Polynome* in $x_1, \ldots, x_k$ als Parameter: die F_k besitzt, wie wir sagen wollen, nur *Punkte von rationalem Charakter.* Die oben angegebene maximale Ordnung $(k(n-k)+1)$ zeigt volle Symmetrie in k und $(n-k)$, bleibt also bei „Dualisierung" unverändert. Im § 3 ergibt sich dann, daß *unter gewissen Differenzierbarkeitsannahmen* die in § 1 an Beispielen gefundenen Höchstordnungen $(k(n-k)+1)$ der ordnungshomogenen Elemente auch *genau* sind, d. h. im allgemeinen nicht überschritten werden. „Im allgemeinen" besagt: abgesehen von gewissen F_k, welche einem in § 3 angegebenen (von n und k abhängigen) Systeme partieller Differentialgleichungen genügen müssen. Aus dem Vorstehenden folgt übrigens unmittelbar, *daß unsere Differenzierbarkeitsforderung das Auftreten ordnungshomogener Gebilde von unendlicher Ordnung im allgemeinen ausschließt.* Die eben erwähnten Differentialgleichungen bzw. die ihnen genügenden k-dimensionalen Ausnahme-Flächenstücke haben als die Verallgemeinerung der geradlinigen F_2 im R_3 zu gelten; sie werden (bezüglich ihrer Ordnung) hier noch nicht näher untersucht, da dies für die gegenwärtigen Zwecke erst in zweiter Linie von Interesse ist.

Man sieht, wie für $k=1$ und $k=n-1$ die früher gewonnenen Ergebnisse sich einordnen. Die in vorliegender Arbeit angegebenen (algebraischen) Beispiele sind aber auch für $k=n-1$ von uns früher noch nicht angeführt worden; insbesondere erhalten wir jetzt auch Beispiele von $(n-1)$-dimensionalen Hyperflächenstücken im R_n, welche von der Ordnung ν sind; dabei kann die ganze Zahl ν beliebig zwischen 2 und n gewählt werden $(2 \leqq \nu \leqq n)$.

Wir bemerken noch: Für $k=1$, $n=2$ weiß man, daß die vorstehend erwähnten, auf ordnungshomogene Gebilde bezüglichen Ergebnisse für *jede* Kurve endlicher Ordnung (also auch ohne jede Differenzierbarkeitsbedingung) gelten. Es liegt die Vermutung nahe, daß dies für beliebiges n und k ebenfalls zutrifft.

Schließlich bringt der § 2 Beispiele für Ordnungen, die in *einzelnen* Punkten auftreten können. Im Falle $k=1$ weiß man nun, daß die Ordnungen $n, n+1, \ldots, 2n-1$ die einzigen sind, welchen Punkte rationalen Charakters auf einer algebraischen Kurve entsprechen können und (bei geeigneter Wahl der Kurve) auch wirklich entsprechen; es sind das genau die Ordnungen, auf die wir auch im folgenden (§ 2) für $k=1$ stoßen werden und die mit dem von uns benutzten Beispieltypus nicht überschritten werden können. Es darf daher vermutet werden, daß auch für beliebiges k (mit $2 \leqq k \leqq n-1$) die von uns erreichten Ordnungen $(n-k+1), \ldots, (2(k(n-k)+1)-1)$ die einzigen sind, welche bei Punkten von rationalem Charakter auf algebraischen F_k auftreten können. Weiter weiß man im Falle $k=1$, daß bei Zulassung von Punkten nicht-rationalen Charakters höchstens die Ordnung $2n$ erreicht werden kann. Angesichts unserer

Ergebnisse könnte man dementsprechend vermuten, daß auch für beliebiges k bei Zulassung von Punkten nicht-rationalen Charakters die Ordnung eines Punktes auf algebraischen F_k nicht größer sein kann als $2(k(n-k)+1)$.

Die für den Fall $k=1$ genannten Ergebnisse gelten übrigens nicht nur für algebraische Kurven, sondern allgemeiner für *elementare*, d. h. für Kurven des R_n, welche darstellbar sind als Summen endlich vieler ordnungshomogener Bogen von endlicher (d. h. n-ter) Ordnung [4]). Vielleicht gilt Entsprechendes auch im R_n für $2 \leqq k$.

Die soeben skizzierten Gedankengänge führen noch zu einer weiteren, hier aber nicht weiter zu verfolgenden, Frage, die unter hinreichend starken Differenzierbarkeitsannahmen am einfachsten Falle $n=3$, $k=2$ erläutert sei. Von den beiden in diesem Falle auftretenden Arten ordnungshomogener Flächenstücke (von den geradlinigen Flächenstücken sehen wir der Einfachheit wegen ab) sind die von zweiter Ordnung identisch mit den konvexen, besitzen also überall eine elliptische Indikatrix; hingegen besitzen die ordnungshomogenen Flächenstücke dritter Ordnung überall eine hyperbolische Indikatrix [5]). Wenn man also schon weiß, daß unser Flächenstück (im R_3) ordnungshomogen ist, so gibt der Trägheitsindex der Indikatrix die genaue Ordnung des Flächenstückes. Es wird nun zu untersuchen sein, wie sich diese Bemerkung auf den Fall beliebiger n und k verallgemeinern läßt.

Bezüglich der Einordnung der in vorliegender Arbeit behandelten Fragen in die allgemeine Strukturtheorie reeller Gebilde kann auf frühere Ausführungen[1]) verwiesen werden.

§ 1. Existenz k-dimensionaler algebraischer ordnungshomogener Gebilde im R_n der Ordnungen $(n-k+1)$ bis $(k(n-k)+1)$.

Wir konstruieren also zunächst Beispiele von algebraischen, k-dimensionalen, ordnungshomogenen Gebilden. Und zwar behandeln wir in Nr. **1**, 1—**1**, 5 gewisse Sonderfälle, welche auch an und für sich von Interesse sind und bei welchen der Gedankengang der Konstruktion besonders deutlich wird. Eine geringe Abänderung der Konstruktion führt dann (Nr. **1**, 6) zu Beispielen allgemeinerer Art.

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ kartesische Koordinaten im R_n, wobei $n \geqq 3$. Ferner sei k eine natürliche Zahl mit $2 \leqq k \leqq n-1$; im Falle $k=1$ ist, wie schon früher [3]) gezeigt, nur die Ordnung $n = 1 \cdot (n-1)+1$ möglich, weshalb für $k=1$ die Konstruktion von Beispielen ordnungshomogener Gebilde überflüssig wird (denn jedes eindimensionale Gebilde enthält ordnungshomogene Teile).

1, 1. *Vorerst sei* $2k < n$, also $k < n-k$. Wir betrachten dann eine k-dimensionale (algebraische) Mannigfaltigkeit F_k, welche definiert ist durch:

$$
(F)\qquad
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_1^m + x_1^{r_2} x_2 + \cdots + x_1^{r_k} x_k \\
x_{k+2} &= x_1^2 + x_2 \\
&\vdots \quad\quad \vdots \\
x_{2k} &= x_1^k \qquad\qquad + x_k \\
x_{2k+1} &= x_1^{k+1} \\
&\vdots \quad\quad \vdots \\
x_n &= x_1^{n-k}\,.
\end{aligned}
$$

---

[4]) Vgl. F. Denk, Über elementare Punkte höherer Ordnung auf Kurven im R_n, Sitz.-Ber. d. phys.-med. Soz. Erlangen **67** (1935), S. 1 ff.

[5]) Man vgl. für den Fall der konvexen Flächenstücke ($n=3$, $k=2$) die wichtige Arbeit der Herren H. Busemann und W. Feller, Krümmungseigenschaften konvexer Flächen, Acta math. **66** (1935), S. 1 ff. Dort werden keinerlei Differenzierbarkeitsannahmen gemacht.

Dabei sollen m, $\tau_2, \ldots, \tau_k$ natürliche Zahlen (einschließlich der Null) sein, welche — unbeschadet weiterer Einschränkungen — folgenden Bedingungen genügen:

$$(1) \qquad n-k+1 \leqq m, \quad 0 \leqq \tau_\varkappa + (n-k) < m, \qquad \varkappa = 2, \ldots, k.$$

Die durch (F) definierte Mannigfaltigkeit ist k-dimensional sogar in dem Sinne, daß die Umgebung eines jeden ihrer Punkte (bis auf höchstens eine auf F_k nirgends dichte Ausnahmemenge) ein topologisches Bild des k-dimensionalen Würfels ist. In der Tat ist die Funktionaldeterminante der k ersten Gleichungen (F) gleich

$$m x_1^{m-1} + \tau_2 x_1^{\tau_2 - 1} x_2 + \cdots + \tau_k x_1^{\tau_k - 1} x_k - 2 x_1^{\tau_2 + 1} - \cdots - k x_1^{\tau_k + k - 1},$$

also nicht identisch Null; denn wegen $2 \leqq k < n-k$ und wegen (1) gilt:

$$m - 1 > \tau_k + (n-k) - 1 > \tau_k + k - 1 > 0.$$

Die Funktionalmatrix von (F) hat also nicht identisch einen Rang kleiner als k; und die Menge der Punkte, in welchen der Rang kleiner ist als k, liegt nirgends dicht auf F_k.

Zur Bestimmung der Ordnung von F_k in ihren einzelnen Punkten beschränken wir uns auf die Betrachtung derjenigen linearen $(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten L_{n-k} des R_n, deren Gleichungen sich in die Gestalt setzen lassen:

$$(L) \qquad x_{k+j} = \bar{L}_j(x_1, x_2, \ldots, x_k; x_{2k+1}, \ldots, x_n)$$
$$= \bar{a}_{j0} + \bar{a}_{j1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{jk} x_k + \bar{a}_{j\,2k+1} x_{2k+1} + \cdots + \bar{a}_{jn} x_n, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Dabei soll also $\| \bar{a}_{j1}, \ldots, \bar{a}_{jk}, \bar{a}_{j\,2k+1}, \ldots, \bar{a}_{jn} \|$ den Rang k besitzen.

Diese Beschränkung rechtfertigt sich wie folgt: Es sei L' eine *beliebige* $(n-k)$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit des R_n, definiert durch ein System S linearer Gleichungen in den $x_1, \ldots, x_n$ vom Range k. Ist dann S keinem System der Form (L) linear äquivalent [6]), so erhält man doch durch eine beliebig kleine Änderung der Koeffizienten von S ein System, welches einem System der Form (L) linear äquivalent ist. Die den (L) (und den ihnen äquivalenten) zugeordneten L_{n-k} liegen also dicht in der auf geeignete Weise als Umgebungsraum erklärten [7]) Menge aller linearen $(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten L_{n-k}. Überdies kann ein Gleichungssystem der Form (L) durch hinreichend kleine Änderung der Koeffizienten nur in ein zu einem (L) linear äquivalentes System übergeführt werden. Die L_{n-k} der Form (L) bilden daher sogar eine im Umgebungsraume *aller* L_{n-k} offene Menge (welche überdies im besagten Raume dicht liegt). Entsprechend der in der Einleitung in Aussicht genommenen Ordnungsdefinition werden wir daher zunächst von den zu (L) *nicht* linear-äquivalenten L_{n-k} absehen und — vorbehaltlich einer weiteren Modifikation (Nr. **1**, 21) — als *Ordnung von* F_k die maximale Mächtigkeit der Durchschnitte von F_k mit einer in der Gestalt (L) darstellbaren linearen L_{n-k} bezeichnen.

1, 2. Wir behaupten nun:

Für $n-k+1 \leqq m \leqq k(n-k)+1$ *und bei geeignet gewählten* $\tau_2, \ldots, \tau_k$ *ist die Ordnung der durch* (F) *definierten* F_k *in jedem Punkte genau gleich* m.

Dabei ist zunächst noch $k < n-k$ angenommen ($k \geqq 2$); für $k \geqq n-k$ vgl. Nr. **1**, 3.

---

[6]) Zwei Systeme $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ von linearen Gleichungen $E_\nu^{(j)}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(j = 1, 2;\ \nu = 1, \ldots, n_j)$ heißen linear äquivalent, wenn die entsprechenden Systeme $E_\nu^{(1)}(x_1, \ldots, x_n)$ und $E_\nu^{(2)}(x_1, \ldots, x_n)$ von linearen Funktionen eine gemeinsame Linearbasis besitzen.

[7]) Etwa durch Deutung des Systems aller Koeffizienten (in dem die L_{n-k} darstellenden Gleichungsssyteme) als „Koordinate" der L_{n-k}.

1, 21. *Beweis.* Durch die letzten $n-2k$ Gleichungen von (F) sind die $x_{2k+\varrho}$ je als lineare Funktionen von $x_1^{k+\varrho}$ bestimmt; dabei ist $1 \leqq \varrho \leqq n-2k$. Setzt man dies in (L) ein, so ergibt sich

$$(\bar{\mathrm{L}}) \qquad x_{k+j} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \bar{a}_{j\varkappa} x_\varkappa + \sum_{\varrho=1}^{n-2k} \bar{a}_{j\,2k+\varrho} x_1^{k+\varrho} + \bar{a}_{j0}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Setzt man in $(\bar{\mathrm{L}})$ für $x_{k+2}, \ldots, x_{2k}$ die rechten Seiten der noch nicht benutzten Gleichungen von (F) (mit Ausnahme der ersten) ein, so folgt aus den $k-1$ letzten Gleichungen $(\bar{\mathrm{L}})$:

$$(\mathrm{L}^*) \qquad x_1^j - \bar{a}_{j1} x_1 - \bar{a}_{j0} - \Big(\sum_{\varrho=1}^{n-2k} \bar{a}_{j\,2k+\varrho} x_1^{k+\varrho}\Big) = \sum_{\varkappa=2}^{k} (\bar{a}_{j\varkappa} - \delta_{j\varkappa})\, x_\varkappa;$$
$$j = 2, \ldots, k; \quad \text{also} \quad k \geqq 2.$$

Dabei ist noch $\delta_{j\varkappa} = 0$ für $j \neq \varkappa$ und $\delta_{j\varkappa} = 1$ für $j = \varkappa$. Nun ist (L*) ein System aus $k-1$ in den $x_2, \ldots, x_k$ linearen Gleichungen; seine Matrix ist durch

$$\| \bar{a}_{j0}, \ldots, \bar{a}_{jk}, \ \bar{a}_{j\,2k+1}, \ldots, \bar{a}_{j\,n} \|, \qquad j = 2, \ldots, k,$$

eindeutig bestimmt.

Diejenigen (L), für welche die (L*) eindeutig nach $x_2, \ldots, x_k$ auflösbar sind, liefern eine im Raume der L_{n-k} dichte offene Menge. *Wir werden uns für die Ordnungsdefinition auf die Betrachtung dieser L_{n-k} beschränken.* Wir können dann statt (L*) schreiben:

$$(\mathrm{L}_*) \qquad x_\varkappa = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{\varkappa\varrho} x_1^\varrho, \qquad \varkappa = 2, \ldots, k.$$

Die $(k-1)(n-k+1)$ Koeffizienten $b_{\varkappa\varrho}$ $(\varkappa = 2, \ldots, k;\ \varrho = 0, \ldots, n-k)$ in (L_*) sind dabei vermittelst (L*) durch die $(k-1)(n-k+1)$ Koeffizienten

$$\bar{a}_{j0}, \ldots, \bar{a}_{jk}, \quad \bar{a}_{j\,2k+1}, \ldots, \bar{a}_{jn}, \qquad j = 2, \ldots, k,$$

eindeutig bestimmt. *Umgekehrt sind durch Vorgabe der $b_{\varkappa\varrho}$ $(\varkappa = 2, \ldots, k;\ \varrho = 0, \ldots, n-k)$ diese $\bar{a}_{j0}, \ldots, \bar{a}_{jn}$ eindeutig bestimmt, sobald nur die Determinante*

$$|M| = \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Diese letzte Behauptung ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen den $b_{\varkappa\varrho}$ und $\bar{a}_{j\tau}$. Um diesen zu finden, setzen wir für die $x_2, \ldots, x_k$ in (L*) die rechten Seiten von (L_*) ein und ordnen nach Potenzen von x_1. Dann ergibt sich:

$$\sum_{\varrho=0}^{n-k} x_1^\varrho \Big[-\delta_{\varrho 0} \bar{a}_{j0} - \delta_{\varrho 1} \bar{a}_{j1} + \delta_{\varrho j} - \sum_{\sigma=1}^{n-2k} \delta_{\varrho\, k+\sigma}\, \bar{a}_{j\,2k+\sigma} \Big] = \sum_{\varrho=0}^{n-k} x_1^\varrho \Big[\sum_{\varkappa=2}^{k} (\bar{a}_{j\varkappa} - \delta_{j\varkappa}) b_{\varkappa\varrho} \Big];$$
$$j = 2, \ldots, k.$$

Die Vergleichung der Koeffizienten rechts und links zeigt für $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$, daß $\bar{a}_{j0}$ und $\bar{a}_{j1}$ durch die $b_{\varkappa 0}$, $b_{\varkappa 1}$ und die übrigen $\bar{a}_{j\tau}$ eindeutig bestimmt werden $(\varkappa = 2, \ldots, k;\ j = 2, \ldots, k)$. Für diese übrigen $\bar{a}_{j\tau}$, also für $\tau = 2, \ldots, k;\ 2k+1, \ldots, n$, ergibt sich ebenso:

$$\delta_{\varrho j} + \Big(\sum_{\varkappa=2}^{k} b_{\varkappa\varrho} \delta_{j\varkappa}\Big) = \sum_{\varkappa=2}^{k} b_{\varkappa\varrho} \bar{a}_{j\varkappa} + \sum_{\sigma=1}^{n-2k} \delta_{\varrho\, k+\sigma}\, \bar{a}_{j\,2k+\sigma}, \qquad \varrho = 2, \ldots, n-k;\ j = 2, \ldots, k.$$

Die quadratische Matrix der Koeffizienten der $\bar{a}_{j\varrho}$ $(\varrho = 2, \ldots, k;\ 2k+1, \ldots, n)$ ist somit

$$M = \begin{Vmatrix} b_{22} & b_{32} & \cdots & b_{k2} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{23} & b_{33} & \cdots & b_{k3} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{2k} & b_{3k} & \cdots & b_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2\,k+1} & b_{3\,k+1} & \cdots & b_{k\,k+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{2\,n-k} & b_{3\,n-k} & \cdots & b_{k\,n-k} & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}$$

und die Determinante von M ist

$$|M| = \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{k2} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{2k} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}.$$

1, 22. In der vorstehenden Betrachtung (Nr. **1, 21**) war die erste Gleichung des Systems $(\bar{\mathrm{L}})$ gar nicht herangezogen worden. Setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung für $x_2, \ldots, x_k$ ihre Ausdrücke aus (L_*) ein, so ergibt sich:

$$(\mathrm{L}_*^1) \qquad x_{k+1} = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{k+1\,\varrho}\, x_1^\varrho,$$

wobei

$$(\mathrm{B}_{k+1}) \quad b_{k+1\,\varrho} = \delta_{\varrho 0}\bar{a}_{10} + \delta_{\varrho 1}\bar{a}_{11} + \sum_{\varkappa=2}^{k} b_{\varkappa\varrho}\bar{a}_{1\varkappa} + \sum_{\sigma=1}^{n-2k} \delta_{\varrho\,k+\sigma}\bar{a}_{1\,2k+\sigma}, \qquad \varrho = 0, 1, \ldots, n-k.$$

Man kann nun mit Hilfe des Systems (B_{k+1}) *bei beliebig vorgegebenen* $b_{i\varrho}$ $(i = 2, \ldots, k+1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, n-k)$ *die* $\bar{a}_{1\varkappa}$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, k;\ 2k+1, \ldots, n)$ *bestimmen und zwar eindeutig, sobald nur, wie vorausgesetzt,* $|M| \neq 0$.

In der Tat ist ja in (B_{k+1}) die Koeffizientenmatrix bezüglich der $\bar{a}_{12}, \ldots, \bar{a}_{1k}$; $\bar{a}_{1\,2k+1}, \ldots, \bar{a}_{1n}$ genau gleich M. Und nach Bestimmung dieser $\bar{a}_{12}, \ldots$ sind dann $\bar{a}_{10}$ und $\bar{a}_{11}$ ersichtlich auch eindeutig bestimmt.

Durch unsere $b_{\varkappa\varrho}$ *wird also eineindeutig eine in der Gestalt* (L) *darstellbare* L_{n-k} *bestimmt, sobald nur* $|M| \neq 0$ *ist. Dies Letztere wird im folgenden stets vorausgesetzt.*

1, 23. Nunmehr können wir aus der noch nicht benutzten *ersten* Gleichung von (F) die $x_2, \ldots, x_{k+1}$ mit Hilfe von (L_*) und (L_*^1) eliminieren. Wir erhalten so eine algebraische Gleichung in x_1 allein, nämlich:

$$x_1^m + x_1^{\tau_2}\left(\sum_{\varrho=0}^{n-1} b_{2\varrho}x_1^\varrho\right) + \cdots + x_1^{\tau_k}\left(\sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{k\varrho}x_1^\varrho\right) - \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{k+1\,\varrho}x_1^\varrho = 0.$$

Dies ist aber eine Gleichung vom Grade m in x_1. Da sie nicht mehr als m reelle Nullstellen besitzt, so kann die F_k höchstens von der Ordnung m sein.

Um zu beweisen, daß die vorgelegte F_k bei passender Wahl der $\tau_2, \ldots, \tau_k$ in jedem ihrer Punkte P_0 von der Ordnung m ist, haben wir festzustellen: Für geeignet gewählte $b_{j\varrho}$ besitzt die obige Gleichung m-ten Grades genau m reelle verschiedene Nullstellen, welchen m verschiedene, in beliebig vorgeschriebener Nähe von P_0 gelegene Punkte des Durchschnittes einer L_{n-k} von der Form (L) mit der F_k entsprechen. Zu dem Zwecke gehen wir folgendermaßen vor: Es sei $P_0 = (x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n)$ der gegebene Punkt. Soll P_0 auf der F_k liegen, so *müssen* $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ *vermöge* (F) *durch* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *bestimmt sein.* Außerdem sollen L_{n-k} von der Gestalt (L) durch zu P_0 beliebig benachbarte und

zugleich auf F_k gelegene Punkte gehen. Um letzteres zu erreichen, verlangen wir von den $b_{j\varrho}$ zunächst, daß

$$(A^*) \qquad \xi_j = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{j\varrho}\xi_1^\varrho, \qquad j = 2, \ldots, k.$$

(A*) ist gleichwertig mit

$$(A_*^*) \qquad b_{j0} = \xi_j - \sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{j\varrho}\xi_1^\varrho, \qquad j = 2, \ldots, k.$$

Durch Einsetzen der rechten Seiten von (A_*^*) in die obige Gleichung m-ten Grades folgt:

$$(G_m) \quad G_m(x_1) = x_1^m + \sum_{j=2}^{k} x_1^{\tau_j}\left\{\left(\sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{j\varrho}x_1^\varrho\right) + \left(\xi_j - \sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{j\varrho}\xi_1^\varrho\right)\right\} - b_{k+1\,0} - \left(\sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{k+1\,\varrho}\,x_1^\varrho\right) = 0.$$

Wir werden jetzt zeigen: Man kann bei gegebenen n, m, k, sowie bei passender Verfügung über $\tau_2, \ldots, \tau_k$, die in $G_m(x_1)$ auftretenden $b_{k+1\,0}$; $b_{j\varrho}$ $(j = 2, \ldots, k+1;$ $\varrho = 1, \ldots, n-k)$ so wählen, daß $G_m(x_1) = 0$ genau m reelle verschiedene Nullstellen x_1 besitzt, die in beliebig vorgeschriebener Nähe von ξ_1 liegen. Wegen (A*) und (A_*^*) liegen dann auch die aus (L_*) zu berechnenden $x_2, \ldots, x_k$ in beliebiger Nähe der $\xi_2, \ldots, \xi_k$. Die aus (F) sich ergebenden $x_{k+1}, \ldots, x_n$ liegen dann ebenfalls beliebig nahe bei $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$, und außerdem liegt der so gefundene Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ nicht nur auf (F), sondern auch auf der mit den (geeignet gewählten) $b_{j\varrho}$ gebildeten und durch sie definierten L_{n-k}, falls eine solche existiert.

1, 24. Bei der in Nr. **1**, 23 skizzierten Konstruktion der Koeffizienten von $G_m(x_1)$ waren die $b_{k+1\,0}$ und $b_{j\varrho}$ $(j = 2, \ldots, k+1;$ $\varrho = 1, \ldots, n-k)$ zunächst nur unter Rücksicht darauf gewählt worden, daß $G_m(x_1)$ lauter reelle Nullstellen besitze. Bei hinreichend kleiner Abänderung aller dieser $b_{j\tau}$ oder auch nur eines Teiles von ihnen ändern sich dann die Nullstellen unserer Gleichung $G_m(x_1) = 0$ beliebig wenig, bleiben also insbesondere alle getrennt, reell und in beliebiger Nähe des vorgeschriebenen Wertes ξ_1. Nun kann aber durch beliebig kleine Abänderung der $b_{22}, \ldots, b_{kk}$ stets $|M| \neq 0$ gemacht werden. Und dann entsprechen den gewählten Werten $b_{j0}, \ldots, b_{j\,n-k}$ auch eindeutig zugehörige Werte $\bar{a}_{j0}, \bar{a}_{j1}, \bar{a}_{j2}, \ldots, \bar{a}_{jk}$; $\bar{a}_{j\,2k+1}, \ldots, \bar{a}_{jn}$, $j = 1, \ldots, k$. Daher gibt es alsdann ein System (L), welches genau die von uns vorgeschriebenen Werte $b_{j\tau}$ liefert, so daß die durch (L) dargestellte L_{n-k} mit der F_k genau m verschiedene, zu P_0 beliebig benachbarte Punkte gemeinsam hat. Die in Nr. **1**, 2 aufgestellte Behauptung ist somit vollständig bewiesen, sobald nur solche $b_{j\tau}$ gefunden sind, für welche $G_m(x_1)$ lauter reelle, beliebig nahe bei ξ_1 gelegene Nullstellen besitzt.

1, 25. Nun zur Wahl der $\tau_2, \ldots, \tau_k$ und der $b_{j\varrho}$. Zunächst sei $\tau_2 + n - k = m - 1$ gesetzt, also $\tau_2 = m - (n-k) - 1$; wegen der über m gemachten Annahme ist $\tau_2 \geqq 0$. Damit ist erreicht, daß in den zu x_1^m in $G(x_1)$ benachbart stehenden Gliedern $\sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{2\varrho}x_1^{\varrho+\tau_2}$ alle Potenzen von x_1 mit Exponenten von $m-1$ bis $m-n+k$ einschließlich und zwar mit den beliebig wählbaren Koeffizienten $b_{2\varrho}$, $\varrho = 1, \ldots, n-k$, auftreten. Weiterhin sind nur zwei Fälle möglich:

Erster Fall: $\tau_2 > n-k \geqq 1$. Dann setzen wir $\tau_2 = \tau_3 + n - k = m - n + k - 1$, also $\tau_3 = m - 2(n-k) - 1$. Jetzt treten in $G(x_1)$ weiterhin die Potenzen $x_1^{m-(n-k)-1}, \ldots, x^{\tau_3+1}$ auf und zwar mit Koeffizienten

$$(I) \qquad b_{3\,n-k} + \xi_2 - \left(\sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{2\varrho}\,\xi_1^\varrho\right); \quad b_{3\,n-k-1}; \ldots; b_{31},$$

denen wir ebenfalls willkürlich vorgeschriebene Werte erteilen können.

Zweiter Fall: $0 \leqq \tau_2 \leqq n-k$. Wir setzen alsdann $\tau_j = \tau_2$, $j = 3, \ldots, k$, und erhalten:

$$x_1^m + (b_{2\,n-k} + b_{3\,n-k} + \cdots + b_{k\,n-k})\,x_1^{m-1} + \cdots + (b_{2\,n-k+1-\tau_2} + \cdots)\,x_1^{n-k+1} + (-b_{k+1\,n-k} + \cdots)\,x_1^{n-k} + (-b_{k+1\,n-k-1} + \cdots)\,x_1^{n-k-1} + \cdots + (-b_{k+1\,0} + \cdots) = 0\,.$$

Infolgedessen kann man durch passende Wahl der $b_{2\,1}, \ldots, b_{k\,n-k}$ den Koeffizienten von $x_1^{m-1}, \ldots, x_1^{n-k+1}$ willkürlich vorgeschriebene Werte erteilen. Die Koeffizienten von $x_1^{n-k}, x_1^{n-k-1}, \ldots$ können bei passender Verfügung über die noch freien $b_{k+1\,\varrho}$, $\varrho = 0, \ldots, n-k$, ebenfalls willkürlich gewählt werden. Damit ist im zweiten Falle das Gewünschte erreicht (vgl. Nr. **1**, 24).

Im *ersten Falle* hat man das Verfahren ganz ähnlich wie oben fortzusetzen und zwar ergibt sich wieder die Unterscheidung in zwei Fälle, je nachdem nämlich $\tau_3 > n-k$ oder $\tau_3 \leqq n-k$ ist. Nach endlich vielen Schritten tritt dabei einmal der *zweite Fall* ein, womit das Verfahren seinen Abschluß findet. Sämtliche Koeffizienten können also jeweils willkürlich gewählt werden. Die Konstruktion einer Gleichung m-ten Grades, in welcher kein Glied fehlt, ist übrigens nur dann möglich, wenn $m \leqq k(n-k)+1$.

Damit ist die Behauptung von Nr. **1**, 2 für $2k < n$ bewiesen.

1, 3. Wir haben bisher die Annahme $2k < n$ zugrunde gelegt.

Der Fall $2k \geqq n$, d. h. $n-k \leqq k \leqq n-1$ läßt sich ganz ähnlich erledigen. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß wir F_k definieren für $k < n-1$ durch

$$\text{(F')} \qquad \begin{aligned} x_{k+1} &= x_1^m + x_1^{\tau_2} x_2 + \cdots + x_1^{\tau_k} x_k \\ x_{k+2} &= x_1^2 + x_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_1^{n-k} + x_{n-k}\,, \end{aligned}$$

hingegen für $k = n-1$ durch die erste dieser Gleichungen allein; und die L_{n-k} definieren durch

$$\text{(L')} \qquad x_\varkappa = \bar{L}'_\varkappa(x_1, \ldots, x_{n-k}) = \bar{a}_{\varkappa 0} + \bar{a}_{\varkappa 1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{\varkappa\,n-k} x_{n-k}, \qquad \varkappa = n-k+1, \ldots, n.$$

Entsprechend wie für $2k < n$ zeigt man, daß durch (F') eine (im früher (Nr. **1**, 1) präzisierten Sinne k-dimensionale) Mannigfaltigkeit F_k definiert wird.

Aus den letzten $n-k-1$ Gleichungen (F') setzen wir sodann die rechter Hand stehenden Ausdrücke für die $n-k-1 \leqq k-1$ Variablen $x_{k+2}, \ldots, x_n$ in die letzten $n-k-1$ Gleichungen (L') ein und erhalten [8])

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= x_1^2 + x_2 = \bar{a}_{k+2\,0} + \bar{a}_{k+2\,1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{k+2\,n-k} x_{n-k} \\ x_{k+3} &= x_1^3 + x_3 = \bar{a}_{k+3\,0} + \bar{a}_{k+1\,3} x_1 + \cdots + \bar{a}_{k+3\,n-k} x_{n-k} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_1^{n-k} + x_{n-k} = \bar{a}_{n\,0} + \bar{a}_{n\,1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{n\,n-k} x_{n-k}\,. \end{aligned}$$

Dies sind $n-k-1$ in $x_2, \ldots, x_{n-k}$ lineare Gleichungen. Wie vorhin beschränken wir uns auf die Betrachtung solcher (L'), für welche die letztgenannten Gleichungen eindeutig nach $x_2, \ldots, x_{n-k}$ auflösbar sind. Also

$$\text{(L}'_*\text{)} \qquad x_j = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{j\varrho} x_1^\varrho, \qquad j = 2, \ldots, n-k\,.$$

Dabei sind, wie man leicht nachrechnet, die $b_{j\varrho}$ ($j = 2, \ldots, n-k$; $\varrho = 0, \ldots, n-k$) den $a_{k+j\,\varrho}$ eineindeutig zugeordnet, falls $\| b_{j2} \ldots b_{j\,n-k} \|$ den Rang $n-k-1$ besitzt.

---

[8]) Falls $n = k+1$, also $k = n-1$ ist, besitzt (L') von vornherein die den (L$'_*$) entsprechende Gestalt (vgl. weiter unten).

Setzen wir die durch (L'_*) gegebenen Ausdrücke für die x_j in die noch nicht benutzten $2k - n + 1$ ersten Gleichungen (L′) ein, so erhalten wir

$$x_\varkappa = \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} \left(\sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{j\varrho} x_1^\varrho \right) + \bar{a}_{\varkappa 0} + \bar{a}_{\varkappa 1} x_1$$

$$= \left(\bar{a}_{\varkappa 0} + \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j0} \right) + \left(\bar{a}_{\varkappa 1} + \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j1} \right) x_1 + \sum_{\varrho=2}^{n-k} \left(\sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j\varrho} \right) x_1^\varrho ,$$

$$\varkappa = n - k + 1, \ldots, k + 1 .$$

Setzt man

$$x_\varkappa = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{\varkappa\varrho} x^\varrho ,$$

so folgt:

Falls $M = \| b_{j2} \ldots b_{j\,n-k} \|$ den Rang $n - k - 1$ besitzt, sind die $\bar{a}_{\varkappa j}$ bei festem $\varkappa$ mit $n - k + 1 \leqq \varkappa \leqq k + 1$ durch Angabe der Werte der $b_{\varkappa\varrho} = \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j\varrho}$ für $\varrho = 2, \ldots, n - k$ eindeutig bestimmt (und umgekehrt). Alsdann ist auch $a_{\varkappa 1}$ und $a_{\varkappa 0}$ eindeutig bestimmt durch Vorgabe von $b_{\varkappa 0} = \bar{a}_{\varkappa 0} + \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j0}$ und von $b_{\varkappa 1} = \bar{a}_{\varkappa 1} + \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j1}$, und umgekehrt. Wie erhalten also schließlich wieder

$$(L'_*) \qquad x_\sigma = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{\sigma\varrho} x_1^\varrho , \qquad \sigma = 2, \ldots, k + 1 ,$$

wobei die $b_{\sigma\varrho}$ den $a_{\varkappa\tau}$ in (L′) ein-eindeutig entsprechen, falls $|M| \neq 0$.

Nun haben wir noch die bis jetzt nicht benutzte erste Gleichung (F′), nämlich $x_{k+1} = x_1^n + x_1^{\tau_2} x_2 + \cdots$, heranzuziehen und in sie aus (L'_*) die Darstellungen der $x_2, \ldots, x_{k+1}$ durch Polynome in x_1 einzusetzen. Wir gelangen dann wieder zu einer Gleichung $G(x_1) = 0$ vom Grade m in x_1 und haben damit den Anschluß an die Betrachtungen des Falles $n < 2k$ erreicht.

1, 4. Wir haben somit den

Satz. *Es gibt im R_n algebraische k-dimensionale Gebilde F_k, deren sämtliche im Endlichen gelegenen Punkte eine und dieselbe vorgeschriebene Ordnung m bezüglich einer wohldefinierten überall dichten offenen Menge von linearen $(n - k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten besitzen: d. h. F_k ist (im Endlichen) ordnungshomogen von der Ordnung m. Und zwar kann als m jede der ganzen Zahlen $n - k + 1$, $n - k + 2, \ldots, k(n - k) + 1$ gewählt werden.*

1, 5. Wir bemerken noch:

Jede lineare Mannigfaltigkeit des R_n, welche in einer der von uns betrachteten, durch (F) *oder* (F′) *dargestellten F_k enthalten ist, muß im Durchschnitte einer Hyperebene $x_1 =$ konst. mit F_k enthalten sein. Und jeder solche Durchschnitt ist selbst eine zu F_k gehörige lineare Mannigfaltigkeit von der Dimension $k - 1$.*

Beweis. Jede lineare Mannigfaltigkeit L_d läßt sich darstellen in der Form

$$x_\nu = A_{\nu 0} + \sum_{\tau=1}^{d} A_{\nu\tau} \lambda_\tau , \qquad \nu = 1, \ldots, n .$$

Dabei ist d gleich der Dimension von L_d, die Matrix der $A_{\nu\tau}$ hat den Rang d und die λ_τ sind unabhängige Veränderliche. Setzen wir dies in (F) ein, so erhalten wir im Falle $k < n - 1$ z. B. aus $x_{k+2} = x_1^2 + x_2$, daß $A_{11} = \cdots = A_{1d} = 0$, d. h. daß $x_1 =$ konst. Auch im Falle $k = n - 1$ kann man entsprechend schließen. Für $x_1 =$ konst. ergibt aber (F) eine lineare $(k - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, w. z. z. w.

Anmerkung. Für $n = 3$, $k = 2$ liefert unser Beispiel ein ordnungshomogenes, *geradliniges* Flächenstück 3. Ordnung.

Die von uns zur Ordnungsbestimmung zugelassenen L_{n-k} (vgl. Nr. **1**, 21) von der Form (L) bzw. (L′) enthalten natürlich keine der kritischen Hyperebenen $x_1 =$ konst.

1, 6. Die von uns bisher konstruierten F_k waren insofern noch von ziemlich spezieller Natur, als die Gleichungen (F) in *allen* $x_2, \ldots, x_k$ *sämtlich* linear sind.

Durch eine geringe Abänderung unserer Konstruktion erhalten wir indes (für $k \geqq 2$) auch Systeme (F), deren erste Gleichung in mindestens einer der $x_2, \ldots, x_k$ *nicht* linear ist. Damit hat man (jedenfalls für $k = n - 1$ und $m \geqq n - k + 2$) die Möglichkeit zur Konstruktion ordnungshomogener F_k, welche keinen linearen Unterraum von mindestens $(k-1)$-ter Dimension enthalten.

Zur Bildung der gewünschten Systeme (F) ändern wir gegenüber (F) in Nr. **1**, 1 bzw. (F′) in Nr. **1**, 3 nur die erste Gleichung ab und setzen für $k < n - 1$:

$$\text{(F)} \qquad \begin{aligned} x_{k+1} &= x_1^m + c_2 x_1^{\beta_2} x_2^{\alpha_2} + c_3 x_1^{\beta_3} x_3^{\alpha_3} + \cdots + c_k x_1^{\beta_k} x_k^{\alpha_k} + d_2 x_2^2 + \cdots + d_k x_k^2 \\ x_{k+2} &= x_1^2 + x_2 \\ &\vdots \\ x_n &= x_1^{n-k} \quad \text{bzw.} \quad x_n = x_1^{n-k} + x_{n-k}, \end{aligned}$$

je nachdem $2k < n$ oder $2k \geqq n$. Im Falle $k = n - 1$ wird nur die erste Gleichung beibehalten. Wie in Nr. **1**, 5 bestätigt man, sowohl für $k < n - 1$ als für $k = n - 1$, daß in F_k etwa enthaltene lineare Mannigfaltigkeiten höchstens in $x_1 =$ konst. ($x_2, \ldots, x_n$ beliebig) enthalten sind. Die Aufgabe besteht nun in der Festlegung der *natürlichen Zahlen* $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$; $\beta_2, \ldots, \beta_k$ sowie der reellen Konstanten $c_2, \ldots, c_k$; $d_2, \ldots, d_k$ *in Abhängigkeit von* m derart, daß die Bestimmung der Ordnung der durch (F) definierten F_k auf eine Gleichung m-ten Grades mit lauter reellen Nullstellen führt. Hierbei können die Überlegungen der Nr. **1**, 1—**1**, 22 bzw. **1**, 3 unverändert übernommen werden, weil bei ihnen die erste Gleichung von (F) bzw. von (F′) überhaupt nicht herangezogen wurde. Ausgenommen ist nur der Nachweis, daß die Punkte, in welchen die (F) bzw. (F′) entsprechende Funktionalmatrix einen Rang kleiner als k besitzt, nirgends dicht liegen; dieser Nachweis läßt sich aber wie in Nr. **1**, 1 führen. Wir erhalten also (entsprechend der Nr. **1**, 23) die Gleichung

$$G_m(x_1) = x_1^m + \sum_{\varkappa=2}^{k} c_\varkappa x_1^{\beta_\varkappa} \Big(\sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{\varkappa\varrho} x_1^\varrho \Big)^{\alpha_\varkappa} + \sum_{\varkappa=2}^{k} d_\varkappa \Big(\sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{\varkappa\varrho} x_1^\varrho \Big)^2 - \Big(\sum_{\varrho=0}^{k-n} b_{k+1\,\varrho} x_1^\varrho \Big) = 0.$$

Dabei ist noch (vgl. (A$^*_*$))

$$b_{\varkappa 0} = \xi_\varkappa - \sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{\varkappa\varrho} \xi_1^\varrho, \qquad \varkappa = 2, \ldots, k.$$

1, 7. Die $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$ und $c_\varkappa$, $d_\varkappa$ sind jetzt so zu wählen, daß x_1^m Glied höchsten Grades in $G_m(x_1)$ wird, ferner daß den m übrigen Koeffizienten von $G_m(x_1)$ durch passende Wahl der $b_{21}, \ldots, b_{k\,n-k}$, $b_{k+1\,0}, \ldots, b_{k+1\,n-k}$ willkürlich vorgeschriebene Werte erteilt werden können; dabei sollen nicht gleichzeitig alle α gleich Eins und alle d gleich Null sein. Dazu dient folgende Bemerkung:

I. *In der Entwicklung von*

$$\Big(\sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho x^\varrho \Big)^q, \qquad wo \quad q > 0 \text{ ganzzahlig},$$

nach Potenzen von x können im Falle eines ungeraden Exponenten q den Koeffizienten von $x^{rq}, \ldots, x^{(q-1)r+1}$ beliebig vorgegebene Werte erteilt werden, indem man nur $b_r, b_{r-1}, \ldots, b_1$ passend wählt.

In der Tat ist

$$\left(\sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho\, x^\varrho\right)^q = b_r^q x^{rq} + \frac{q!}{(q-1)!} b_r^{q-1} b_{r-1} x^{rq-1} + \cdots + \left(\sum \frac{q!}{\tau_r! \cdots \tau_0!} b_r^{\tau_r} \cdots b_0^{\tau_0}\right) x^{rq-\lambda} + \cdots;$$

dabei ist im allgemeinen Glied über alle ganzzahligen $\tau_r, \ldots, \tau_0$ zu summieren, welche folgenden Bedingungen genügen:

$$\tau_\varrho \geqq 0, \quad \tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_r = q, \quad 0 \cdot \tau_0 + 1 \cdot \tau_1 + \cdots + r \cdot \tau_r = rq - \lambda,$$

und mithin

$$\sum_{\varrho=0}^{r} (r - \varrho)\, \tau_\varrho = \lambda.$$

Für $1 \leqq \lambda \leqq r-1$ muß daher (wegen $\tau_\varrho \geqq 0$) jedenfalls $\tau_\varrho = 0$ sein, wenn $0 \leqq \varrho \leqq r - \lambda - 1$. Und aus $\tau_{r-\lambda} \neq 0$ folgt: $\tau_{r-\lambda} = 1$, $\tau_r = q-1$, alle übrigen $\tau_\varrho = 0$. Im Koeffizienten von $x^{rq-\lambda}$, dargestellt als Polynom in den $b_r, b_{r-1}, \ldots, b_0$, treten also für $\lambda \geqq 1$ nur $b_r, \ldots, b_{r-\lambda}$ auf und zwar $b_{r-\lambda}$ nur in dem Gliede $\frac{q!}{(q-1)!\,1!} b_r^{q-1} b_{r-\lambda}$, also insbesondere nur in der ersten Potenz; für $\lambda = 0$ haben wir als Koeffizienten b_r^q. Da q nach Voraussetzung ungerade ist, hat die Gleichung $y^q = A$ für *jedes* A (genau) eine reelle Lösung, so daß b_r^q jeden vorgeschriebenen Wert annehmen kann. Nach Festlegung von $b_r \neq 0$, also des Koeffizienten von x^{rq}, kann dann (durch Auflösung einer linearen Gleichung) b_{r-1} eindeutig so bestimmt werden, daß der Koeffizient von x^{rq-1} einen beliebig vorgeschriebenen Wert annimmt, usw. Daraus folgt die Behauptung.

Ferner bemerken wir:

II. *In der Entwicklung von*

$$x^r\left(\sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho\, x^\varrho\right) + \left(\sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho\, x^\varrho\right)^2 - \left(\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho\, x^\varrho\right)^2$$

nach Potenzen von x kann durch passende Wahl der $b_r, \ldots, b_1, c_r, \ldots, c_1$ den Koeffizienten von $x^{2r}, \ldots, x^{r+1}$ jeder beliebig vorgeschriebene Wert erteilt werden.

In der Tat: Der Koeffizient von x^{2r} ist $b_r + b_r^2 - c_r^2$. Ist daher b_r^* der vorgeschriebene Wert, so kann man durch hinreichend große Wahl von $b_r > 0$ erreichen, daß $b_r + b_r^2 - b_r^* > 0$ ist; alsdann gibt es genau ein $c_r > 0$ mit $b_r + b_r^2 - b_r^* = c_r^2$ d. h. mit $b_r + b_r^2 - c_r^2 = b_r^*$, wie behauptet. Der Koeffizient von x^{2r-1} ist nun gleich $(1 + 2b_r)\, b_{r-1} - 2 c_r c_{r-1}$ usw. (vgl. I). Daraus ergibt sich ohne weiteres die Behauptung.

1, 8. Auf Grund der in Nr. **1**, 7 gemachten Bemerkungen kann jetzt die Festlegung der $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa, c_\varkappa, d_\varkappa$ ähnlich erfolgen wie früher die der $\tau_\varkappa$ (vgl. Nr. **1**, 25). Es wird genügen, dies für den *Fall* $k > 2$ *und für* $m \geqq 2(n-k) + 1$ zu skizzieren. (Dabei soll $m \leqq k(n-k) + 1$ sein.)

Wir dividieren m durch $n-k$, lassen aber auch „Reste" gleich $n-k$ zu, setzen also:

$$m = \sigma(n-k) + \beta + 1$$

wo σ und β ganzzahlig mit $0 \leqq \beta \leqq n-k-1$, also $2 \leqq \sigma \leqq k - \frac{\beta}{n-k}$.

1, 81. *Es sei zunächst* $\sigma \equiv 1 \pmod 2$.

Wir setzen

$\beta_2 = \beta$, $\alpha_2 = \sigma$, $c_2 = 1$; $\beta_3 = \beta + (n-k)$, $\alpha_3 = \sigma - 2$, $c_3 = 1$; $\beta_4 = \beta$, $\alpha_4 = \sigma - 2$, $c_4 = 1$; usw.; bis wir zu $\sigma - 2\mu = 1$, also zu $\beta_{2\mu+1} = \beta + (n-k)$, $\alpha_{2\mu+1} = 1$, $c_{2\mu+1} = 1$ gelangt sind. Wegen $\sigma \leqq k$ ist auch $2\mu + 1 \leqq k$.

1, 811. *Im Falle* $\sigma = 2\mu + 1 < k$ ist $3 < k$ und wir setzen:

$c_{2\mu+2} = \cdots = c_k = 0$; $d_{2\mu+1} = d_{2\mu+2} = \cdots = -d_k = 1$; alle übrigen $d_\varkappa = 0$.

Es ergibt sich:

$$G_m(x_1) = x_1^m + x_1^\beta x_2^\sigma + x_1^{\beta+(n-k)} x_3^{\sigma-2} + \cdots + x_1^{\beta+(n-k)} x_{2\mu+1} + x_{2\mu+1}^2 + \cdots - x_k^2 - x_{k+1};$$

dabei denken wir uns für $x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ die zugehörigen Polynome in x_1 gemäß (L*), (A_*^*) bzw. (L_*') usw. schon eingesetzt. Durch passende Wahl der $b_{2\varkappa}, \ldots, b_{2\mu\,\varkappa}$ mit $\varkappa = 1, \ldots, n-k$, lassen sich jetzt den Koeffizienten von $x_1^{\beta+\sigma(n-k)}, \ldots, x_1^{\beta+2(n-k)}$ beliebige Werte erteilen (gemäß Nr. **1**, 7; I). Bei der Bestimmung der übrigen Koeffizienten behandeln wir die Fälle $\beta > 0$ und $\beta = 0$ getrennt.

Falls $\beta > 0$, wählen wir die $b_{2\mu+2\,\varkappa}, \ldots, b_{k-1\,\varkappa}$ beliebig ($\varkappa = 1, \ldots, n-k$, soweit nicht schon $2\mu + 2 = k$), ebenso die $b_{k\,n-k}, \ldots, b_{k\,\beta+1}$. Durch passende Wahl der $b_{2\mu+1\,n-k}, \ldots, b_{2\mu+1\,1}$ können wir dann den Koeffizienten von $x_1^{\beta+2(n-k)}, \ldots, x_1^{\beta+(n-k)+1}$ willkürlich vorgeschriebene Werte erteilen, wie die Betrachtung von $x_1^{\beta+(n-k)} x_{2\mu+1} + x_{2\mu+1}^2$ lehrt. Die Betrachtung der noch übrigen Glieder des gleichen Ausdruckes zeigt, daß durch passende Wahl der $b_{k\beta}, \ldots, b_{k1}$ (vgl. Nr. **1**, 7; I, für $q = 2$, $r = n - k$) auch den Koeffizienten von $x_1^{\beta+(n-k)}, \ldots, x_1^{n-k+1}$ willkürliche Werte erteilt werden können. Schließlich kann man durch passende Verfügung über die noch völlig freien $b_{k+1\,n-k}, \ldots, b_{k+1\,0}$ den Koeffizienten von $x_1^{n-k}, \ldots, x^0$ willkürlich vorgeschriebene Werte erteilen, womit alles Gewünschte geleistet ist.

Falls $\beta = 0$, besteht die Änderung nur darin, daß wir jetzt den Koeffizienten von $x_1^{2(n-k)}, \ldots, x_1^{n-k+1}$ willkürliche Werte dadurch erteilen, daß wir die $b_{2\mu+1\,n-k}, \ldots, b_{2\mu+1\,1}$ zusammen mit den $b_{k\,n-k}, \ldots, b_{k1}$ gemäß Nr. **1**, 7; II geeignet bestimmen.

1, 812. *Im Falle* $\sigma = 2\mu + 1 = k$ muß $\beta = 0$ sein (wegen $m \leqq k(n-k) + 1$ und $k \geqq 3$ (wegen $k \geqq 2$)). Es tritt dann jedenfalls x_2 in der ersten Gleichung (F) in mindestens der dritten Potenz auf. Wir setzen alle $d_\varkappa = 0$ und verfahren im übrigen wie in Nr. **1**, 811.

1, 82. *Nunmehr sei* $\sigma \equiv 0 \pmod 2$.

Wegen $\sigma \geqq 2$ (vgl. die Voraussetzung in Nr. **1**, 8) können wir setzen:

$$\beta_2 = \beta + (n-k),\ \alpha_2 = \sigma - 1,\ c_2 = 1; \quad \beta_3 = \beta,\ \alpha_3 = \sigma - 1,\ c_3 = 1;$$
$$\beta_4 = \beta + (n-k),\ \alpha_4 = \sigma - 3; \quad c_4 = 1;\ \text{usw.},$$

bis wir zu $\sigma - 2\nu + 1 = 1$, also $\beta_{2\nu} = \beta + (n-k)$, $\alpha_{2\nu} = 1$, $c_{2\nu} = 1$ gelangt sind.

Im Falle $2\nu = \sigma = k$ ist wieder $\beta = 0$ und wir erhalten:

$$G_m(x_1) = x_1^m + x_1^{n-k} x_2^{k-1} + \cdots + x_1^{n-k} x_k - x_{k+1} = 0.$$

Die Koeffizienten von $G_m(x_1)$, als Polynom in x_1 betrachtet, sind ersichtlich beliebiger Werte fähig (Nr. **1**, 7; I).

Im Falle $2\nu = \sigma < k$ setzen wir:

$$G_m(x_1) = x_1^m + x_1^{\beta+(n-k)} x_2^{\sigma-1} + \cdots + x_1^{\beta+(n-k)} x_{2\nu} + x_{2\nu}^2 + x_{2\nu+1}^2 + \cdots - x_k^2 - x_{k+1} = 0.$$

Im übrigen verlaufen die Schlüsse entsprechend wie oben.

§ 2. Existenz k-dimensionaler algebraischer Gebilde im R_n mit Punkten bis zur Ordnung $2(k(n-k)+1)$ einschließlich.

Durch eine leichte, sogleich anzugebende Abänderung der in Nr. **1**, 1—**1**, 4 benutzten Beispiele gelangt man zu algebraischen k-dimensionalen Mannigfaltigkeiten F_k mit *einzelnen* Punkten von höherer Ordnung als $k(n-k)+1$. Dabei sind die betrachteten

Punkte wieder von rationalem Charakter (insofern nämlich für die F_k wieder eine Darstellung (F) gilt, in welcher $n-k$ der Koordinaten *Polynome* in den übrigen sind).

Der Gedankengang ist folgender: Zunächst können wir die in Nr. 1, 23 angegebenen Bedingungen (A_*) weglassen; denn wir brauchen ja nur für die Umgebung eines einzigen (passend gewählten) Punktes die F_k als von der gewünschten Ordnung nachzuweisen. Durch den Wegfall von (A_*) werden nun $k-1$ neue Koeffizienten frei verfügbar. Daher ist die Existenz von Punkten höherer als m_0-ter Ordnung bereits wahrscheinlich ($m_0 = k(n-k)+1$). Um nun Punkte möglichst hoher Ordnung zu bekommen, müssen wir auf eine Gleichung $G(x_1)=0$ von möglichst hohem Grade und mit lauter reellen Nullstellen ausgehen. Der günstigste Fall ist dabei derjenige, in welchem $G(x_1)$ ein Polynom möglichst hohen Grades m in $y=x_1^2$ mit lauter positiven verschiedenen Nullstellen y ist. Dann erhalten wir nämlich im ganzen $2m$ verschiedene reelle Nullstellen x_1 von $G(x_1)$.

Den eben gemachten Andeutungen entsprechend, setzen wir zunächst *im Falle* $2k<n$:

$$
\text{(F)}\qquad
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_1^m + x_1^{\tau_2}x_2 + \cdots + x_1^{\tau_k}x_k^k\\
x_{k+2} &= x_1^{\sigma_2} + x_2\\
x_{k+3} &= x_1^{\sigma_3} + x_3\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x_{2k} &= x_1^{\sigma_k} + x_k\\
x_{2k+1} &= x_1^{\sigma_{k+1}}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x_n &= x_1^{\sigma_{n-k}}.
\end{aligned}
$$

Wie in § 1 stellen wir wieder durch Elimination die Gleichung $G(x_1)=0$ her; diese lautet jetzt:

$$
\begin{aligned}
&x_1^m + x_1^{\tau_2}(b_{20}+b_{21}x_1+b_{22}x_1^{\sigma_2}+\cdots+b_{2\,n-k}x_1^{\sigma_{n-k}}) + \cdots\\
&\quad + x_1^{\tau_k}(b_{k0}+b_{k1}x_1+b_{k2}x_1^{\sigma_2}+\cdots+b_{k\,n-k}x_1^{\sigma_{n-k}})\\
&\quad = b_{k+1\,0}+b_{k+1\,1}x_1+b_{k+1\,2}x_1^{\sigma_2}+\cdots+b_{k+1\;n-k}x_1^{\sigma_{n-k}}.
\end{aligned}
$$

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: *m ist eine gerade ganze Zahl, $m=2t$, mit*

$$k(n-k)+2 \leqq m \leqq 2k(n-k).$$

Wir setzen alsdann $b_{j1}=0$, $j=2,\ldots,k,k+1$; ferner $\sigma_\varkappa=\sigma_{\varkappa-1}+2$, $\varkappa=2,\ldots,n-k$ mit $\sigma_1=0$, so daß $\sigma_\varkappa=2(\varkappa-1)$. Darnach bestimmen wir τ_2 wie folgt:

Ist $m>2(n-k)$, so setzen wir $\sigma_{n-k}+\tau_2=2(n-k-1)+\tau_2=m-2$, also $\tau_2=2(t-n+k)>0$.

Ist $m\leqq 2(n-k)$, so werden wir τ_2 sowie alle $b_{2\varrho}$ gleich Null setzen, deren zugehöriges $\sigma_\varrho \geqq m$ ist. Ferner setzen wir alle übrigen $b_{j\varrho}$ gleich Null ($j=3,\ldots,k,k+1$; $\varrho=0,2,\ldots,n-k$). Die noch übrig bleibenden Glieder b_{20} und $b_{2\tau}x^{\sigma_\tau}$, $\tau=2,3\ldots$, zusammen mit x^m liefern uns dann ein Polynom $P(y)$ in $y=x_1^2$ vom Grade t, dessen höchstes Glied den Koeffizienten 1 hat, während den Koeffizienten aller übrigen Glieder beliebige Werte erteilt werden können, also insbesondere solche, daß $P(y)$ lauter positive beliebig nahe an Null gelegene, verschiedene Nullstellen besitzt.

Somit haben wir im Falle $m\leqq 2(n-k)$ bereits die gewünschte Gleichung. Wir erhalten so einen Punkt der gewünschten Ordnung, nämlich (vgl. (F) und (A_*)):

$$(\xi_1=0,\ \xi_2=b_{20},\ldots,\xi_k=b_{k0};\qquad \xi_{k+1}=0,\ \xi_{k+2}=b_{20},\ldots,\xi_{2k}=b_{k0},\ \xi_{2k+1}=\cdots=\xi_n=0).$$

Im Falle $m > 2(n-k)$ haben wir das Verfahren weiter fortzusetzen, nämlich τ_3 zu bestimmen. Dabei verfahren wir ganz entsprechend wie für τ_2. Wir machen nämlich den Ansatz: $\tau_2 - 2 = \tau_3 + 2(n-k-1)$, wobei dann wieder $\tau_3 = 0$ usw. zu nehmen ist für $\tau_2 \leqq 2(n-k)$. Das Verfahren bricht spätestens mit der Wahl von τ_k ab. Soll in diesem Falle die Konstruktion eines Polynoms in $x_1^2 = y$ mit dem Koeffizienten 1 für das höchste Glied möglich sein, dessen sämtlichen übrigen Koeffizienten beliebige Werte erteilt werden können, so muß ersichtlich $\tau_k \leqq 2(n-k)$ sein, also

$$m \leqq 2(n-k) + 2(k-1)(n-k) = 2k(n-k).$$

Zweiter Fall: *m ist eine ungerade ganze Zahl, $m = 2t-1$, mit*

$$k(n-k) + 2 \leqq m \leqq 2k(n-k) + 1.$$

Um auch jetzt Gleichungen mit lauter reellen beliebig benachbarten Nullstellen zu konstruieren, bemerken wir zunächst: Ist

$$P(x^2) = x^{2t} + a_1 x^{2t-2} + \cdots + a_{t-1} x^2 + a_t$$

ein Polynom mit lauter reellen, absolut beliebig kleinen Nullstellen ($a_t \neq 0$), so gilt das Gleiche von

$$Q(x) = x^{2t+1} + a_1 x^{2t-1} + \cdots + a_{t-1} x^3 + a_t x + b,$$

wenn nur b hinreichend klein ist. Demgemäß setzen wir $\sigma_\varkappa = \sigma'_\varkappa + 1$, legen der Betrachtung $m' = m - 1$ statt m zugrunde und wählen die $\sigma_\varkappa$ genau so wie im ersten Falle. Ferner setzen wir, wie vorhin, $\tau_2 = m' - 2 - \sigma'_{n-k}$ bzw. $\tau_2 = 0$, je nachdem $m' > 2(n-k)$ oder $m' \leqq 2(n-k)$. Im letzteren Falle nehmen wir ferner $b_{2\varrho} = 0$ für alle ϱ, für welche $\sigma'_\varrho \geqq m' = 2t$, sowie auch $b_{21} = 0$. Ferner setzen wir dann noch diejenigen $b_{j\varrho}$ gleich Null, für welche $j = 3, \ldots, k+1$; $\varrho = 0, 1, \ldots, n-k$, *mit Ausnahme von* $b_{k+1\,0}$. Ersichtlich gelangen wir so zu einem Polynom $Q(x)$ von der oben angegebenen Form, dessen sämtliche Koeffizienten frei wählbar sind, womit das Gewünschte erreicht ist.

Im Falle $m' > 2(n-k)$ führen wir die Rechnung entsprechend weiter, indem wir wieder $b_{21} = 0$ setzen und zur Bestimmung von τ_3 die gleichen Überlegungen und Fallunterscheidungen vornehmen wie bei der Bestimmung von τ_2. Man sieht, wie das Verfahren fortzusetzen ist und daß dabei $m' + 1 = m \leqq 2k(n-k) + 1$ sein muß, falls man schließlich zu einem Polynom $Q(x)$ gelangen will, über dessen *sämtliche* Koeffizienten sich frei verfügen läßt.

Der Fall $2k \geqq n$ erledigt sich entsprechend, wenn man die in § 1 angegebene Behandlung sinngemäß abändert.

Zusammenfassend erhalten wir also den

Satz. *Es gibt k-dimensionale algebraische Gebilde F_k im R_n, welche Punkte der Ordnung π besitzen, wo π irgendeine ganze Zahl aus der Reihe $n-k+1, \ldots, 2k(n-k)+1$ sein kann. Diese Punkte können überdies so gewählt werden, daß sie von rationalem Charakter (im oben definierten Sinne) sind.*

Ferner gilt:

Falls die F_k Punkte von nicht-rationalem Charakter enthalten darf, kann man sogar zu Punkten der Ordnung $2k(n-k)+2 = 2[k(n-k)+1]$ gelangen.

Beweis. Es werde F_k wie in § 1 durch (F) definiert mit dem Zusatze $x_1 = t^2$, so daß also in der Umgebung der Hyperebene $x_1 = 0$ *reelle* Punkte nur mit $x_1 > 0$ auftreten können. Man konstruiert nun $G(x_1)$ mit $m = k(n-k)+1$ wie in § 1, indem man als zu betrachtenden Punkt $P_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ den Punkt $(\xi_1 = 0; \xi_2, \ldots, \xi_n)$ wählt, wo die

$\xi_2, \ldots, \xi_k$ beliebig seien. Alsdann setzt man $x_1 = t^2$ und bestimmt die sämtlich willkürlichen Koeffizienten so, daß lauter reelle, beliebig nahe bei $t = 0$ gelegene Nullstellen t existieren; deren Anzahl ist dann $2[k(n-k)+1]$.

§ 3. $(k(n-k)+1)$ als obere Schranke der Ordnung differenzierbarer, ordnungshomogener k-dimensionaler Gebilde im R_n.

Zunächst sei wieder $2k < n$. Wir betrachten dann im euklidischen R_n ein k-dimensionales Gebilde F_k. Wir denken uns jetzt F_k dargestellt als abgeschlossene Hülle einer Summe von k-dimensionalen ordnungshomogenen Gebilden H_k, deren offene Kerne paarweise fremd sind [9]). Über F_k machen wir folgende

Voraussetzung I. F_k werde definiert durch $n-k$ Gleichungen

$$(\Phi) \qquad \Phi_\tau(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \tau = k+1, \ldots, n.$$

Der Definitionsbereich sei ein n-dimensionaler Würfel, etwa $|x_\nu| \leqq 1$, $\nu = 1, \ldots, n$. Ferner seien die Φ_τ so oft stetig differenzierbar, als es im folgenden für sie und die aus ihnen gewonnenen Funktionen gebraucht wird, und es sei die Funktionalmatrix $\left\| \frac{\partial \Phi_\tau}{\partial x_\nu} \right\|$ vom Range $n-k$.

Voraussetzung II. Der Durchschnitt einer Umgebung des auf H_k betrachteten Punktes mit einer passenden, die jeweils in Frage kommenden L_{n-k} enthaltenden, L_{n-k+1} soll ein Bogen sein (vgl. die ausführlichere Fassung weiter unten).

Wir wollen zeigen, daß jedes solche ordnungshomogene Gebilde höchstens von der Ordnung $m = k(n-k)+1$ sein kann bezüglich einer nachher festzulegenden Menge von L_{n-k}, welche im Raume aller L_{n-k} offen und überall dicht ist. Es genügt, die Umgebung U eines inneren Punktes P eines solchen H_k, also die Umgebung etwa von $(x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}; x_{k+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, zu untersuchen. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (gegebenenfalls bei passender Umnumerierung der x_ν) H_k in U darstellbar sei in der Form

$$(F) \qquad x_{k+\varrho} = \psi_\varrho(x_1, \ldots, x_k), \qquad \varrho = 1, \ldots, n-k,$$

sowie daß die ψ_j in U so oft differenzierbar sind, als wir es nötig haben. Das alles folgt aus der Voraussetzung I.

Abgesehen von einer (im Raume aller L_{n-k}) nirgends dichten Menge können wir jede L_{n-k} in der Gestalt schreiben

$$(L) \qquad x_{k+j} = a_{j0} + \sum_{\tau=1}^{k} a_{j\tau} x_\tau + \sum_{\mu=2k+1}^{n} a_{j\mu} x_\mu, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Durch die letzten $n-2k$ Gleichungen (F) sind die $x_{2k+\tau}$ $(\tau = 1, \ldots, n-2k)$ als Funktionen von $x_1, \ldots, x_k$ bekannt. Diese setzen wir in die Gleichungen (L) ein und erhalten unter Heranziehung der noch übrigen k ersten Gleichungen (F):

$$(\bar{L}) \qquad x_{k+j} = a_{j0} + \sum_{\tau=1}^{k} a_{j\tau} x_\tau + \sum_{\mu=2k+1}^{k} a_{j\mu} \psi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_k) = \psi_j(x_1, \ldots, x_k), \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Die $(\bar{L})$ sind k Gleichungen in den $x_1, \ldots, x_k$ als Unbekannten. Soll H_k ordnungshomogen von mindestens der Ordnung m sein, so muß $(\bar{L})$ bei passender Wahl der $k + k \cdot k + k(n-2k) = k(n-k)+k$ willkürlichen Koeffizienten $a_{j\lambda}$ mindestens m verschiedene Lösungs-k-tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ besitzen, die in beliebiger Nähe eines beliebig vorgegebenen Punktes $P^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ von U liegen. Durch Auswahl erhalten wir

[9]) Diese Darstellung ist immer möglich. Vgl. O. Haupt, Über die Struktur reeller Kurven, Crelles Journal **164** (1931), S. 50ff., Einleitung.

eine konvergente [10]) Folge (L_ν) solcher L_{n-k} mit dem Limes

$$(\bar{\mathrm{L}}^*) \qquad x_{k+j} = a_{j\tau}^* + \sum_{\tau=1}^{k} a_{j\mu}^* x_\tau + \sum_{\mu=2k+1}^{n} a_{j\mu}^* x_\mu , \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Übrigens müssen die Gleichungen $(\bar{\mathrm{L}}^*)$ für $x_\nu = x_\nu^*$, $\nu = 1, \ldots, n$, erfüllt sein.

Wir stellen zunächst eine *notwendige Bedingung dafür auf, daß ein vorgegebener Punkt P* mindestens die Ordnung m besitzt.*

Dabei benutzen wir die *Voraussetzung* II, die in ausführlicherer Fassung so lautet: Für alle Punkte $(a_{10}, \ldots, a_{kn})$ einer im Raume aller $k(n-k+1)$-tupel $(a_{j\varkappa})$ dichten offenen Menge sollen $k-1$ der Gleichungen $(\bar{\mathrm{L}})$ nach $k-1$ der Unbekannten, etwa nach $x_2, \ldots, x_k$, eindeutig auflösbar sein in der Umgebung von P^*, und zwar sollen die so erhaltenen

$$(\mathrm{L}_*) \qquad x_\tau = \varphi_\tau(x_1)$$

eindeutige Funktionen von x_1 mit entsprechend hohen gleichmäßig beschränkten stetigen Differentialquotienten sein in einer festen Umgebung von $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$. Demgemäß sei nun $x_\lambda = \varphi_\lambda(x_1; a_{10}, \ldots, a_{kn})$, $\lambda = 2, \ldots, k$. Setzen wir das in die noch nicht verwendete Gleichung von $(\bar{\mathrm{L}})$ ein, so erhalten wir eine Gleichung in x_1 allein: $G(x_1) = 0$. Angenommen, es besitze $G(x_1)$ für fast alle (L_ν) mindestens m verschiedene (reelle) Nullstellen, welche für fast alle ν in beliebiger Nähe von x_1^* liegen. Dann hat die ϱ-te Ableitung von $G(x_1)$ in eben dieser Nähe mindestens $m-\varrho$ verschiedene Nullstellen, $\varrho = 1, \ldots, m-1$. Wegen der vorausgesetzten Existenz und gleichmäßigen Beschränktheit der Differentialquotienten der φ_λ erhalten wir für eine passende Auswahlfolge aus (L_ν) und für $\nu \to \infty$ folgende Gleichungen, in welchen überall $x_\tau = x_\tau^*$, $\tau = 1, \ldots, k$, zu setzen ist und wobei $\varphi_\tau^{(\sigma)}$ den Limes eines Mittelwertes der σ-ten Ableitung von φ_τ für $\nu \to \infty$ bedeutet:

$$\text{(S)} \quad \begin{gathered} a_{j0}^* + a_{j1}^* x_1^* + \sum_{\tau=2}^{k} a_{j\tau}^* x_\tau^* + \left[\sum_{\mu=2k+1}^{n} a_{j\mu}^* \psi_{\mu-k}(x_1^*, \ldots, x_\varkappa^*)\right] - \psi_j(x_1^*, \ldots, x_k^*) = 0, \\ a_{j1}^* + \sum_{\tau=2}^{k} a_{j\tau}^* \varphi_\tau' + \left[\sum_{\mu=2k+1}^{n} a_{j\mu}^* \left(\frac{d\psi_{\mu-k}}{dx_1}\right)\right] - \frac{d\psi_j}{dx_1} = 0, \\ \sum_{\tau=2}^{k} a_{j\tau}^* \varphi_\tau^{(\sigma)} + \left[\sum_{\mu=2k+1}^{n} a_{j\mu}^* \frac{d^\sigma \psi_{\mu-k}}{dx_1^\sigma}\right] - \frac{d^\sigma \psi_j}{dx_1^\sigma} = 0, \\ j = 1, \ldots, k; \quad \sigma = 2, \ldots, m-1; \end{gathered}$$

dabei ist

$$\frac{d\psi}{dx_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \sum_{\varkappa=2}^{k} \frac{\partial \psi}{\partial x_\varkappa} \varphi_\varkappa' \quad \text{usw.}$$

Das sind km *algebraische* Gleichungen, nämlich gleich Null gesetzte Polynome in den $k(n-k+1)$ Unbekannten $a_{j\lambda}^*$ und den $(k-1)(m-1)$ Unbekannten $\varphi_\tau^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, \ldots, m-1$; $\tau = 2, \ldots, k$. In den Gleichungen (S) sind übrigens auch diejenigen enthalten, zufolge deren $(\bar{\mathrm{L}}^*)$ für $x_\nu = x_\nu^*$ erfüllt ist. Wie die Beispiele des § 1 zeigen, sind unsere Gleichungen im allgemeinen gewiß miteinander verträglich, wenn $km \leqq (k-1)(m-1) + k(n-k+1)$, wenn also $m \leqq k(n-k)+1$. Wird diese maximale Ordnung $(k(n-k)+1)$ überschritten, so sind die (S) sicher nur dann ver-

---

[10]) Eine Folge $(L^{(\nu)})$ von L_{n-k}, welche in der Gestalt (L) darstellbar sind, heißt *konvergent*, wenn die entsprechenden Koeffizienten in der Darstellung (L) konvergieren. Der Limes wird durch (L) geliefert, wenn darin für die Koeffizienten die entsprechenden Koeffizientenlimites eingesetzt werden.

träglich, wenn ein den homogenisierten (S) zugehöriges *Resultantensystem* (R) Null wird; dieses ist ein *System von algebraischen Bedingungsgleichungen für die (partiellen) Ableitungen der* ψ_ϱ im betrachteten Punkt P^* und stellt eine *notwendige* Bedingung dafür dar, daß der betrachtete Punkt von höherer als $(k(n-k)+1)$-ter Ordnung ist. Diese Bedingung ist aber durchaus *nicht* als *hinreichend* erwiesen; es ist ja in ihr noch nicht einmal berücksichtigt, daß die Lösungen $\varphi_\tau^{(\sigma)}$, $a_{j\lambda}^*$, soweit sie überhaupt für uns in Frage kommen, *reell* sein müssen.

Der Fall $2k \geqq n$ führt zum gleichen Ergebnis, wenn man die Voraussetzung II durch eine dem System (L′) (vgl. Nr. **1**, 3) angepaßte Voraussetzung II′ ersetzt. Soll nun das betrachtete Gebilde *ordnungshomogen* von höherer Ordnung als $(k(n-k)+1)$ sein, so muß (R) identisch in $x_1, \ldots, x_k$ befriedigt sein, d. h. unser Gebilde muß einem *gewissen System* (R*) *partieller Differentialgleichungen* Genüge leisten [11]). Ob unter den durch (R*) gekennzeichneten F_k sich wirklich ordnungshomogene von höherer Ordnung als $(k(n-k)+1)$ befinden, ist durch unsere Überlegungen nicht entschieden. Bezeichnen wir daher die durch (R*) gekennzeichneten F_k als *Ausnahme-*F_k, so haben wir den

Satz. *Eine* F_k, *welche sich im Kleinen in der Gestalt* (F) *darstellen läßt, und welche im Kleinen den Voraussetzungen* I *und* II *bzw.* I *und* II′ *genügt, ist darstellbar als abgeschlossene Hülle einer Summe von ordnungshomogenen* F_k, *deren jede höchstens die Ordnung* $(k(n-k)+1)$ *besitzt, und von Ausnahme-*F_k.

[11]) Für $n = 3$, $k = 2$ ergibt sich die partielle Differentialgleichung der geradlinigen Flächen (vgl. a. a. O. [3])). In diesem Falle sind also die Bedingungsgleichungen keineswegs identisch, d. h. für *jede* Fläche, erfüllt.

Eingegangen 7. Juli 1936.

Berichtigung zur Arbeit O. Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung.

Crelles Journal 167 (1931).

Seite 35, Nr. 2, 6 zweiter Absatz, vorletzte Zeile ist, worauf Herr W. Scholz aufmerksam machte, nach „endlicher Relativordnung gilt“ noch einzufügen: „falls in jedem Verzweigungspunkte V nur endlich viele, bis auf V paarweise fremde Teilbogen von K zusammenstoßen“ (vgl. den Wortlaut des Satzes in der später erschienenen Arbeit von Marchaud, A., Sur diverses extensions de la notion de continu d'ordre borné, Ann. école normale (3) 49 (1932), S. 136). Diese Ergänzung bezieht sich auf eine *lediglich zusätzliche Bemerkung*, aus welcher keinerlei Folgerungen gezogen werden. Sämtliche übrigen Darlegungen und Ergebnisse meiner Arbeit bleiben daher unberührt.

Eingegangen 8. Oktober 1936.

Torsionsideale, Torsionsklassen und Torsion.

Von *Wolfgang Franz* in Marburg.

In der vorliegenden Arbeit werden die Überdeckungen [1] [2] $\mathfrak{U}$ topologischer Komplexe mit dem Ring der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers K untersucht und vollständig charakterisiert. Es handelt sich, in rein algebraischer Formulierung, um die folgende Frage: Gegeben sind n Matrizen R_k ($k = n-1, n-2, \ldots, 0$), die Berandungsmatrizen, aus K mit α_{k+1} Zeilen und α_k Spalten, vom Rang r_k und mit den Relationen $R_k R_{k-1} = 0$. Sie sollen mit den sämtlichen ganzzahligen α_k-reihigen Matrizen T_k aus K mit der Determinante 1 oder allgemeiner mit Determinanten aus einer Gruppe $\mathfrak{T}$ von Einheiten aus K, den Transformationsmatrizen, in der Weise transformiert werden, daß R_k übergeht in $T_{k+1}^{-1} R_k T_k$. Sie sollen ferner beliebig erweitert werden, d. h. etwa R_k soll eine neue $(\alpha_{k+1}+1)$-te Zeile und eine neue (α_k+1)-te Spalte bekommen, die an ihrem Schnittpunkt eine 1 und sonst lauter Nullen enthalten; R_{k+1} soll dabei, wenn nicht $k = n-1$ ist, eine entsprechende neue $(\alpha_{k+1}+1)$-te Nullspalte, R_{k-1}, wenn nicht $k = 0$ ist, eine entsprechende neue (α_k+1)-te Nullzeile erhalten. Bei beiden Prozessen bleibt die Bedingung $R_k R_{k-1} = 0$ offensichtlich erhalten. Es ist ein vollständiges Invariantensystem anzugeben.

Das geschieht auf Grund der Steinitzschen Elementarteilertheorie für Matrizen aus K [3]. Diese Theorie muß hier nach zwei Seiten erweitert werden. Einerseits werden an Stelle beliebiger unimodularer Transformationsmatrizen, deren Determinante eine beliebige Einheit aus K ist, nur solche mit der Determinante 1 zugelassen. Andererseits handelt es sich an Stelle einer einzigen zu transformierenden Matrix um eine Reihe von solchen mit entsprechend modifizierter Transformationsvorschrift. Als Invarianten von $\mathfrak{U}$ ergeben sich zunächst diejenigen, welche auch bei Überdeckungen mit beliebigen Körpern auftreten: die Bettischen Zahlen und, im Falle, daß alle Bettischen Zahlen Null sind, die Torsion [4]. Ferner ergeben sich als arithmetische Invarianten die von 1 ver-

---

[1]) K. Reidemeister, Überdeckungen von Komplexen, Journ. f. reine u. angew. Math. **173** (1935).

[2]) W. Franz, Überdeckungen topologischer Komplexe mit hyperkomplexen Systemen, Journ. f. reine u. angew. Math. **173** (1935).

[3]) E. Steinitz, Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern. I, Math. Ann. **71** (1912), II, Math. Ann. **72** (1912); im folgenden angeführt als St. I, II. Die Theorie der idealen Systeme (Operatorgruppen) über K aus St. II wird hier nicht wesentlich benutzt. Vgl. ferner: W. Krull, Matrizen, Moduln und verallgemeinerte abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen, Sitz.-Ber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math. nat. Klasse 1932, Abh. 2. — W. Franz, Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern, Journ. f. reine u. angew. Math. **171** (1934).

[4]) W. Franz, Über die Torsion einer Überdeckung, Journ. f. reine u. angew. Math. **173** (1935); im folgenden angeführt als T. Von den dortigen determinantentheoretischen Bezeichnungen wird hier ohne nochmalige Erklärung Gebrauch gemacht.

schiedenen Elementarteiler und die Steinitzschen Spalten- und Zeilenklassen der Berandungsmatrizen, hier Torsionsideale und Torsionsklassen genannt.

In § 1 werden die Invarianten aufgestellt und die Beziehungen zwischen ihnen hergeleitet. Die Torsion erweist sich dabei als bis auf Einheiten durch die Torsionsideale bestimmt. § 2 enthält im Anschluß an Steinitz die verschärfte Äquivalenztheorie der einzelnen Matrix. In § 3 und § 4 wird die Vollständigkeit und Unabhängigkeit des Invariantensystemes festgestellt. In § 5 wird die zu $\mathfrak{U}$ duale Überdeckung $\mathfrak{U}^*$ mit dem zu K konjugiert komplexen Körper untersucht. Im Falle, daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ dieselbe Überdeckung darstellen, ergeben sich Verallgemeinerungen der Poincaréschen Dualitätsbeziehungen für Mannigfaltigkeiten.

Der Körper K wird als algebraischer Zahlkörper endlichen Grades angenommen; jedoch lassen sich die vorliegenden Untersuchungen, ebenso wie die Steinitzsche Äquivalenztheorie, ohne wesentliche Änderungen auf den Fall eines algebraischen Zahlkörpers unendlichen Grades übertragen. Die Berandungsmatrizen R_k werden, ohne daß dadurch die Allgemeinheit beschränkt wird, als ganzzahlig vorausgesetzt.

§ 1. Die Invarianten.

1. Bei Transformation der Berandungsmatrizen R_k bleiben die Ränge r_k und damit die Bettischen Zahlen

$$p_k = \alpha_k - r_k - r_{k-1} \quad (k = n, n-1, \ldots, 0;\ r_n = r_{-1} = 0)$$

invariant. Bei Erweiterung, etwa von R_k, wachsen α_{k+1}, α_k, r_k je um 1; p_k und p_{k+1} bleiben also erhalten.

Die Elementarteilertheorie ergibt, daß bei Transformation die Elementarteiler und die Spalten- und Zeilenklassen invariant bleiben. Bei Erweiterung von R_k mögen aus den Matrizen R_{k+1}, R_k, R_{k-1} die Matrizen R'_{k+1}, R'_k, R'_{k-1} entstehen. Sie haben die Ränge r_{k+1}, $r_k + 1$, r_{k-1}. Die Elementarteiler von R'_{k+1} und R'_{k-1} sind ersichtlich dieselben wie die von R_{k+1} und R_{k-1}. R'_k hat sicher den ersten Elementarteiler 1. Der Wertebereich der von Null verschiedenen ν-reihigen Unterdeterminanten von R'_k ($\nu \geqq 2$) ist identisch mit dem der von Null verschiedenen ν-reihigen und $(\nu-1)$-reihigen Unterdeterminanten von R_k. Der ν-te Determinantenteiler von R'_k ist daher gleich dem $(\nu-1)$-ten Determinantenteiler von R_k; die von 1 verschiedenen Elementarteiler der Berandungsmatrizen R_k bleiben bei Erweiterung und Transformation erhalten; sie heißen die *Torsionsideale k-ter Dimension* der Überdeckung.

Die abgeleiteten Matrizen $R'^{(r_{k+1})}_{k+1}$ bzw. $R'^{(r_{k-1})}_{k-1}$ gehen aus $R^{(r_{k+1})}_{k+1}$ bzw. $R^{(r_{k-1})}_{k-1}$ durch Einfügung von gewissen Nullspalten bzw. Nullzeilen hervor, $R'^{(r_{k+1})}_{k}$ aus $R^{(r_k)}_k$ durch Einfügung von Nullspalten und Nullzeilen. Die Spaltenklasse $\mathfrak{S}_k$ und die Zeilenklasse $\mathfrak{Z}_k$ bleiben also erhalten; sie heißen die beiden *Torsionsklassen k-ter Dimension* der Überdeckung.

Bei Transformationen bleibt endlich nach T. Nr. 5 die *Torsion* [4])

$$\mathsf{T} = \mathfrak{S}_{n-1} \frac{\mathfrak{d}_{n-1}}{\mathfrak{d}_{n-2}} \frac{\mathfrak{S}_{n-3}}{\mathfrak{S}_{n-2}} \cdots \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2} \dfrac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_0} \dfrac{1}{\mathfrak{S}_0} & \text{bei geradem } n, \\ \dfrac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1} \dfrac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_1} \mathfrak{d}_0 & \text{bei ungeradem } n \end{cases}$$

invariant. Daß T auch bei Erweiterungen invariant bleibt, erkennt man daraus, daß die adjungierten Matrizen $R^{\langle r_k \rangle}_k$ sich bei Erweiterungen analog verhalten wie die abgeleiteten

$R_k^{(r_k)}$; die Spalten $\mathfrak{s}_k$ und Zeilen $\mathfrak{z}_k$ aus der Definition von T brauchen daher bei Erweiterung nur durch gewisse Nullen aufgefüllt zu werden, die von Null verschiedenen Zahlen darin bleiben unter Einschluß ihrer Reihenfolge erhalten; das gleiche gilt also für die einzelnen Proportionalitätsfaktoren und damit für T selbst.

2. Die angegebenen Invarianten sind nicht unabhängig. Die Elementarteilertheorie zeigt, daß für den r_k-ten Determinantenteiler $\mathfrak{d}_k$ von R_k, das Produkt aller k-dimensionalen Torsionsideale, die Beziehung gilt

$$\mathfrak{d}_k \sim \mathfrak{S}_k \mathfrak{Z}_k. \tag{1}$$

Weitere Beziehungen gelten, wenn eine oder alle Bettischen Zahlen Null sind. Die Spaltenklasse $\mathfrak{S}_{n-1}$ läßt sich als Idealklasse des größten gemeinsamen Teilers der Spalte $\mathfrak{s}_{n-1}$ charakterisieren, in Symbolen $\mathfrak{S}_{n-1} \sim (\mathfrak{s}_{n-1})$. Ist $p_n = 0$, so reduziert sich $\mathfrak{s}_{n-1}$ auf eine Zahl, also ist $\mathfrak{S}_{n-1} \sim 1$. Ebenso ist $\mathfrak{Z}_{n-1} \sim (\mathfrak{z}_{n-1})$, $\mathfrak{S}_{n-2} \sim (\mathfrak{z}_{n-2})$. Ist $p_{n-1} = 0$, so sind nach T. Nr. **2**, **4** $\mathfrak{z}_{n-1}$ und $\mathfrak{z}_{n-2}$ proportional, also $(\mathfrak{z}_{n-1}) \sim (\mathfrak{z}_{n-2})$, $\mathfrak{Z}_{n-1} \sim \mathfrak{S}_{n-2}$. Allgemein gilt

$$\begin{gathered} \mathfrak{Z}_k \sim \mathfrak{S}_{k-1}, \quad \text{wenn } p_k = 0 \ \ (k = n-1, \ldots, 1), \\ \mathfrak{S}_{n-1} \sim 1, \ \text{ wenn } p_n = 0, \quad \mathfrak{Z}_0 \sim 1, \ \text{ wenn } p_0 = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Sind alle Bettischen Zahlen gleichzeitig Null, so gilt nach T. Nr. **4**, daß $\mathfrak{z}_{n-1}$ zu $\mathfrak{z}_{n-2}$, $\mathfrak{s}_{n-2}$ zu $\mathfrak{s}_{n-3}$ usw. proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{z}_k/\mathfrak{z}_{k-1}$ darf, wenn es nur auf seine Idealdarstellung ankommt, durch den Quotienten der entsprechenden größten gemeinsamen Teiler ersetzt werden, $(\mathfrak{z}_k/\mathfrak{z}_{k-1}) = (\mathfrak{z}_k)/(\mathfrak{z}_{k-1})$. Wegen der Assoziativität des größten gemeinsamen Teilers ist ferner $(\mathfrak{s}_k)\,(\mathfrak{z}_k) = \mathfrak{d}_k$. Führt man das in die Definition von T ein, so ergibt sich

$$(\mathsf{T}) = \frac{\mathfrak{d}_{n-1}}{\mathfrak{d}_{n-2}} \frac{\mathfrak{d}_{n-3}}{\mathfrak{d}_{n-4}} \cdots \begin{cases} \cdots \dfrac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_0} & \text{bei geradem } n, \\ \cdots \dfrac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1}\, \mathfrak{d}_0 & \text{bei ungeradem } n. \end{cases} \tag{3}$$

Die Idealdarstellung von T ist demnach durch die Torsionsideale festgelegt; Überdeckungen mit sonst gleichen Invarianten können sich bezüglich der Torsion nur durch verschiedene Erzeugende T für das Ideal (T) unterscheiden.

§ 2. Äquivalenztheorie der einzelnen Matrix.

3. Eine ganzzahlige quadratische Matrix der Determinante 1 heiße eine 1-Matrix. Zwei Matrizen A und A' aus K mit m Zeilen und n Spalten heißen 1-äquivalent, genauer in K 1-äquivalent, wenn sie durch vordere m-reihige und hintere n-reihige 1-Matrizen aus K als Faktoren in einander übergehen, $A' = PAQ$. Entsprechend werden die Begriffe links-1-äquivalent und rechts-1-äquivalent gebraucht. Es soll gezeigt werden: A und A' sind dann und nur dann 1-äquivalent, wenn sie im Range, den Elementarteilern, der Spalten- und der Zeilenklasse und im Falle $m = n$ außerdem in der Determinante übereinstimmen. Daß im Falle $m = n$ die Determinante invariant bleibt, ist klar. Die übrigen Invarianten ergeben sich aus der gewöhnlichen Äquivalenztheorie. Es handelt sich hier darum, diese Invarianten als hinreichend für die 1-Äquivalenz zu erkennen.

A habe den Rang r, die Elementarteiler $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_r$ und die Spaltenklasse $\mathfrak{S}$ und die Zeilenklasse $\mathfrak{Z}$. Nach St. I, 29, 31 ist A wechselseitig linksteilbar mit einer Normalgestalt N folgender Art:

(a) Wenn $\mathfrak{S} \sim 1$, so sind in N nur die ersten r Zeilen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ von Null verschieden, und sie besitzen die größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_r$.

(b) Wenn $\mathfrak{S} \nsim 1$, so sind in N nur die ersten $r+1$ Zeilen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r, \mathfrak{z}_r'$ von Null verschieden, und sie besitzen die größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_r\mathfrak{q}, \mathfrak{e}_r\mathfrak{q}'$; dabei ist $\mathfrak{z}_r$ zu $\mathfrak{z}_r'$ proportional, $\mathfrak{q} \sim \mathfrak{q}'$, $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') = 1$. Die Ideale $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ dürfen in ihrer Idealklasse innerhalb der Bedingung $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') = 1$ beliebig gewählt werden. Es existieren ganze Zahlen c, c' mit $(c) = \mathfrak{q}'\mathfrak{c}$ mit ganzem $\mathfrak{c}$, $(c') = \mathfrak{q}\mathfrak{c}$ so, daß $c\mathfrak{z}_r + c'\mathfrak{z}_r' = 0$. Die Spaltenklasse $\mathfrak{S}$ von A und N berechnet sich aus dieser Normalgestalt in einfacher Weise. Es sind jeweils zwei Unterdeterminanten r-ten Grades zur Bestimmung von $\mathfrak{S}$ maßgebend, von denen die eine mit den Zeilen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$, die andere mit den Zeilen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_{r-1}, \mathfrak{z}_r'$ gebildet ist; ist $\mathfrak{d}_r$ der r-te Determinantenteiler von A und hat die erste die Idealdarstellung $\mathfrak{d}_r\mathfrak{q}\mathfrak{g}$ mit ganzem $\mathfrak{g}$, so hat die zweite die Darstellung $\mathfrak{d}_r\mathfrak{q}'\mathfrak{g}$. Daraus folgt $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{d}_r\mathfrak{g} \sim \mathfrak{q}^{-1} \sim \mathfrak{q}'^{-1}$. Multipliziert man im Falle (a) die Zeile $\mathfrak{z}_r$, im Falle (b) die beiden Zeilen $\mathfrak{z}_r, \mathfrak{z}_r'$ mit einer beliebigen Einheit $\mathfrak{e}$, so bleiben die vorstehenden Überlegungen unverändert gültig; die r-te Abgeleitete $N^{(r)}$ erhält den Faktor ε, über den unten verfügt werden wird.

Es sei etwa $P_0 A = N$, mit ganzzahligem P_0 aus K. Ist $r < m$, so kann man P_0 nach St. II, 66 durch eine 1-Matrix P aus K mit $PA = N$ ersetzen. Ist $r = m$, so folgt $\mathfrak{S} \sim 1$. Durch Bildung der r-ten Abgeleiteten ergibt sich $|P_0| A^{(r)} = N^{(r)}$, und da $A^{(r)}$ und $N^{(r)}$ von Null verschiedene Zeilen mit demselben größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{d}_r$ sind, ist $|P_0|$ eine Einheit. Dann und nur dann sind A und N links-1-äquivalent, wenn $A^{(r)} = N^{(r)}$. Wir wählen ε so, daß das der Fall ist, und setzen dann $P_0 = P$, so daß stets $PA = N$ ist mit einer 1-Matrix P.

4. Die (m, n)-reihige Matrix A' stimme mit A in den oben genannten Invarianten überein. A' ist mit einer entsprechend gebauten Normalgestalt N' links-1-äquivalent, $P'A' = N'$ mit einer 1-Matrix P' aus K. Die r-te und $(r+1)$-te Zeile $\bar{\mathfrak{z}}_r$ und $\bar{\mathfrak{z}}_r'$ von N' im Falle (b) können so gewählt werden, daß auch $c\bar{\mathfrak{z}}_r + c'\bar{\mathfrak{z}}_r' = 0$. Nach St. I, 33 sind dann N und N' wechselseitig rechtsteilbar. Es sei etwa $N = N'Q_0$ mit ganzzahligem Q_0 aus K. Wenn $r < n$, so kann man wie eben Q_0 durch eine 1-Matrix Q mit $N = N'Q$ ersetzen. Wenn $r = n$, so ist $\mathfrak{Z} \sim 1$. Durch Bildung der r-ten Abgeleiteten folgt $N^{(r)} = N'^{(r)}|Q_0|$, und da $N^{(r)}$ und $N'^{(r)}$ von Null verschiedene Spalten mit demselben größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{d}_r$ sind, ist $|Q_0|$ eine Einheit. Dann und nur dann sind N und N' rechts-1-äquivalent, wenn $N^{(r)} = N'^{(r)}$. Wenn $n = r < m$, so werde ε so gewählt, daß dies der Fall ist. Wenn $n = r = m$, so ist $N^{(r)} = |N| = |A|$, $N'^{(r)} = |N'| = |A'|$ und wegen der Voraussetzung $|A| = |A'|$ ist $N^{(r)} = N'^{(r)}$ von selbst erfüllt. Wir setzen dann $Q_0 = Q$, so daß stets $N = N'Q$ ist mit einer 1-Matrix Q.

Zusammen ergibt sich $PA = N$, $P'A' = N'$, $N = N'Q$, also $(P'^{-1}P)AQ^{-1} = A'$ mit 1-Matrizen $P'^{-1}P$ und Q aus K. Damit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen. Die Einheit ε ist nur dann besonders gewählt worden, wenn entweder $r = n$ oder $r = m$. Im Falle $r < n$, $r < m$ folgt also über die obige Behauptung hinaus: Sind A und A' 1-äquivalent, $A' = PAQ$, so können P und Q als 1-Matrizen so modifiziert werden, daß $(PA)^{(r)}$ eine beliebig vorgegebene Einheit ε als Faktor bekommt.

§ 3. Ein Spezialfall.

5. Es seien A und A' (l, m)-reihige, B und B' (m, n)-reihige ganzzahlige Matrizen aus K, $AB = A'B' = 0$ und A und A' rechtsäquivalent, $A' = AU$, B und B' links-

äquivalent, $B' = VB$ mit unimodularen U und V aus K. Es soll die Existenz einer unimodularen Matrix T aus K mit $A' = AT^{-1}$, $B' = TB$ gezeigt werden.

K^* sei eine algebraische Erweiterung endlichen Grades von K derart, daß in K^* alle Ideale von K zu Hauptidealen werden. In K^* existieren unimodulare Matrizen Π, P, Σ mit l, m, bzw. n Reihen so, daß

$$\Pi A' \mathsf{P} = \mathsf{N}_1, \qquad \mathsf{P}^{-1} B' \Sigma = \mathsf{N}_2, \tag{4}$$

wo $\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2$ in bekannter Weise gebildete Normalformen sind: Haben A und A' bzw. B und B' die Ränge r bzw. s, so sind N_1 bzw. N_2 nur in den rechten oberen r-reihigen bzw. s-reihigen Teilmatrizen, und zwar nur in deren Hauptdiagonalen mit von Null verschiedenen Elementen besetzt. In den Hauptdiagonalen stehen die Elementarteiler von A und A' bzw. von B und B' in beliebiger Darstellung als Hauptideale; sonst enthalten N_1 und N_2 nur Nullen. Es folgt

$$\Pi A U \mathsf{P} = \mathsf{N}_1, \qquad \mathsf{P}^{-1} V B \Sigma = \mathsf{N}_2. \tag{5}$$

Wir betrachten die Matrix

$$\Gamma = \mathsf{P}^{-1} U^{-1} B \Sigma = \mathsf{P}^{-1} U^{-1} V^{-1} \mathsf{P} \mathsf{N}_2.$$

Wegen der ersten Darstellung ist nach (5) $\mathsf{N}_1 \Gamma = 0$, in Γ verschwinden also die letzten r Zeilen. Wegen der letzten Darstellung sind in Γ höchstens die s letzten Spalten mit von Null verschiedenen Elementen besetzt. Die rechte obere $(m - r, s)$-reihige Teilmatrix von Γ, welche demnach die einzigen von Null verschiedenen Elemente von Γ enthält, heiße Γ_0. Die größten gemeinsamen Teiler der Spalten von Γ_0 sind die Elementarteiler von N_2. Da das zugleich die Elementarteiler von Γ und damit von Γ_0 sind, ist Γ_0 in einer Normalgestalt (§ 1) und kann daher durch einen linksseitigen unimodularen Faktor T_0 auf die Diagonal-Normalform $\mathsf{T}_0 \Gamma_0$ gebracht werden, und zwar in der Weise, daß

$$\begin{pmatrix} \mathsf{T}_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{N}_2.$$

Wird

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \mathsf{T}_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathsf{T}_0^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gesetzt, so gilt

$$\mathsf{T}\Gamma = \mathsf{N}_2, \qquad \mathsf{N}_1 \mathsf{T}^{-1} = \mathsf{N}_1. \tag{6}$$

Durch Einsetzen von Γ und nach (5) folgt

$$\Pi A (U \mathsf{P} \mathsf{T}^{-1}) = \mathsf{N}_1, \qquad (\mathsf{T} \mathsf{P}^{-1} U^{-1}) B \Sigma = \mathsf{N}_2.$$

Wird ferner $U \mathsf{P} \mathsf{T}^{-1} = \mathsf{Z}$ gesetzt, so folgt nach (4)

$$\Pi A \mathsf{Z} = \Pi A' \mathsf{P} = \mathsf{N}_1, \qquad \mathsf{Z}^{-1} B \Sigma = \mathsf{P}^{-1} B' \Sigma = \mathsf{N}_2,$$

$$A' = A (\mathsf{Z} \mathsf{P}^{-1}), \qquad B' = (\mathsf{P} \mathsf{Z}^{-1}) B.$$

Es existiert also eine Matrix $\mathsf{X} = \mathsf{Z}\mathsf{P}^{-1}$ und eine Matrix $\mathsf{Y} = \mathsf{P}\mathsf{Z}^{-1} = \mathsf{X}^{-1}$ in K^* mit

$$\begin{cases} A' = A\mathsf{X}, & A = A'\mathsf{Y}, \\ \mathsf{X}B' = B, & \mathsf{Y}B = B'. \end{cases} \tag{7}$$

6. Die vier letzten Gleichungen lassen sich als inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Elemente von X und Y auffassen. Nun ist die Lösbarkeitsbedingung für solche Systeme vom zugrunde gelegten Körper unabhängig. (Sie lautet nämlich: Das

System $C\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ ist dann und nur dann ganzzahlig lösbar, wenn C und die aus C durch Anfügung von $\mathfrak{c}$ entstehende Matrix dieselben Elementarteiler haben.) Daher sind die vier Gleichungen auch in K ganzzahlig lösbar. Die entsprechenden Matrizen seien mit X und Y bezeichnet.

7. Hilfssatz 1. *Besitzt die (l, m)-reihige Matrix A mindestens r Elementarteiler Eins, die (m, n)-reihige Matrix B mindestens s Elementarteiler Eins, so besitzt AB mindestens $r + s - m$ Elementarteiler Eins.*

Beweis. Besitzt eine Matrix aus K mindestens t Elementarteiler Eins, so ist sie, als Matrix aus dem Restklassenkörper $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ nach einem beliebigen Primideal $\mathfrak{p}$ von K als Modul aufgefaßt, mindestens vom Rang t. Gilt das letztere für jedes $\mathfrak{p}$, so hat umgekehrt die Matrix mindestens t Elementarteiler Eins. Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes gilt nach den Gesetzen über den Rang eines Produktes, daß der Rang von AB in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ mindestens $r + s - m$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Haben die (l, m)-reihigen und (m, n)-reihigen Matrizen A und B aus K die Ränge r und s, so existiert eine ganzzahlige m-reihige Matrix W in K von einem Range $\leqq r + s$ mit $AW = A$, $WB = B$.*

Beweis. Das Gleichungssystem $A\mathfrak{s} = 0$, in dem $\mathfrak{s}$ eine zu bestimmende ganzzahlige m-gliedrige Spalte bedeutet, hat $m - r$ linear unabhängige Lösungen. Es existiert ein System von $m - r + 1$ ganzzahligen Lösungen derart, daß sich jede andere ganzzahlige Lösung daraus mit ganzzahligen Koeffizienten linear homogen kombinieren läßt. Dieses Lösungssystem sei zu der $(m, m - r + 1)$-reihigen Matrix S vom Range $m - r$ mit $m - r$ Elementarteilern Eins zusammengefaßt. Analog repräsentiere die $(m - s + 1, m)$-reihige Matrix Z vom Rang $m - s$ mit $m - s$ Elementarteilern Eins die sämtlichen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystemes $\mathfrak{z}B = 0$, in der $\mathfrak{z}$ eine zu bestimmende ganzzahlige m-gliedrige Zeile bedeutet. S darf rechtsseitig mit einer beliebigen $(m - r + 1)$-reihigen unimodularen Matrix Q, Z linksseitig mit einer beliebigen $(m - s + 1)$-reihigen unimodularen Matrix P multipliziert werden. ZS hat nach dem Hilfssatz 1 mindestens

$$(m - r) + (m - s) - m = m - (r + s) = p$$

Elementarteiler Eins. Die unimodularen Matrizen P, Q können so bestimmt werden, daß (PZ) (SQ) eine Normalform wird, bei der im Falle (a), daß der Rang von ZS größer als p ist, innerhalb der ersten p Spalten und Zeilen nur in der Hauptdiagonale Einsen, sonst lauter Nullen stehen, im Falle (b), daß der Rang von ZS genau p ist, innerhalb der ersten $p - 1$ Spalten und Zeilen nur in der Hauptdiagonale Einsen, sonst lauter Nullen stehen, während die folgende zweireihige Hauptuntermatrix von der Form

$$\begin{pmatrix} a & ab \\ ac & abc \end{pmatrix},$$

vom Rang 1 und mit dem (einzigen) Elementarteiler 1 ist; sonst enthält die Normalform lauter Nullen. Da die Zahlen a, ab, ac, abc teilerfremd sind, lassen sich ganze Zahlen x, y, u, v in K so bestimmen, daß

$$ax + aby + acu + abcv = 1. \tag{8}$$

Die Zeilen von PZ seien der Reihe nach mit $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$, die Spalten von SQ mit $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots$ bezeichnet. Dann genügt die Matrix

$$W = E - \mathfrak{s}_1\mathfrak{z}_1 - \cdots - \mathfrak{s}_{p-1}\mathfrak{z}_{p-1} - (x\mathfrak{s}_p\mathfrak{z}_p + y\mathfrak{s}_{p+1}\mathfrak{z}_p + u\mathfrak{s}_p\mathfrak{z}_{p+1} + v\mathfrak{s}_{p+1}\mathfrak{z}_{p+1}),$$

wo E die Einheitsmatrix bezeichnet, den Bedingungen des Satzes; dabei ist im Falle (a)

die Klammer durch $\mathfrak{s}_p \mathfrak{z}_p$ zu ersetzen. Es ist nämlich ersichtlich $AW = AE = A$, $WB = EB = B$. Ferner ist

$$W\mathfrak{s}_i = E\mathfrak{s}_i - \mathfrak{s}_i = 0$$

für $i = 1, \ldots, p$ im Falle (a), für $i = 1, \ldots, p-1$ im Falle (b). Wird im Falle (b)

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_p(ax + acu) + \mathfrak{s}_{p+1}(ay + acv)$$

gesetzt, so folgt

$$\begin{aligned} W\mathfrak{s} &= \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_p[(ax + acu)(ax + acu) + (abx + abcu)(ay + acv)] \\ &\quad - \mathfrak{s}_{p+1}[(ay + acv)(ax + acu) + (aby + abcv)(ay + acv)] \\ &= \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_p(ax + acu) - \mathfrak{s}_{p+1}(ay + acv) = 0, \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von (8). Die Spalten $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{p-1}, \mathfrak{s}_p$, bzw. $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{p-1}, \mathfrak{s}$ sind linear unabhängig. Für $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p$ ist das wegen der Normalform augenscheinlich; für $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{p-1}, \mathfrak{s}$ ebenfalls, sobald feststeht, daß $\mathfrak{s} \neq 0$. Aus $\mathfrak{s} = 0$ aber folgte, daß $\mathfrak{s}_p$ und $\mathfrak{s}_{p+1}$ proportional wären, also wegen der Normalform $\mathfrak{s}_{p+1} = b\mathfrak{s}_p$. Nach der Definition von $\mathfrak{s}$ folgte weiter wegen (8) $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_p \neq 0$. Das Gleichungssystem $W\mathfrak{s} = 0$ hat also p linear unabhängige Lösungen, W ist also höchstens vom Rang $r + s$, wie zu zeigen war.

Ist analog W' eine ganzzahlige Matrix aus K von einem Rang $\leqq r + s$ mit $A'W' = A$, $W'B' = B'$ und ersetzt man in den Gleichungen (7) X durch WX, Y durch $W'Y$, so erhält man

$$\text{(7a)} \qquad \begin{cases} A' = AX, & A = A'Y, \\ XB' = B, & YB = B'. \end{cases}$$

Dabei sind X und Y ganzzahlig aus K und höchstens vom Rang $r + s$.

8. Gemäß der Gleichung $AX = A'$ entspricht jeder Spalte $\mathfrak{x}$ von X eine Spalte $A\mathfrak{x}$ von A'. r linear unabhängigen Spalten $A\mathfrak{x}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ von A' entsprechen dabei r linear unabhängige Spalten $\mathfrak{x}_\nu$ von X. Dann und nur dann ist $\Sigma x_\nu A\mathfrak{x}_\nu = 0$ mit beliebigen x_ν aus K, wenn alle $x_\nu = 0$. — Gemäß der Gleichung $B = XB'$ lassen sich aus den Spalten von X s linear unabhängige Spalten $\mathfrak{b}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, s)$ kombinieren. Aus einer Relation $\Sigma x_\nu \mathfrak{x}_\nu = \Sigma b_\mu \mathfrak{b}_\mu$ zwischen den $\mathfrak{x}_\nu$ und den $\mathfrak{b}_\mu$ folgte

$$A \sum_\nu x_\nu \mathfrak{x}_\nu = A \sum_\mu b_\mu \mathfrak{b}_\mu = 0,$$

wegen $AB = 0$, also $x_\nu = 0$, und wegen der Unabhängigkeit der $\mathfrak{b}_\mu$ auch $b_\mu = 0$. Aus den Spalten von X lassen sich also $r + s$ unabhängige Spalten kombinieren, X hat mindestens und damit genau den Rang $r + s$. Jedes Spaltenkompositum $\mathfrak{s}$ von X mit $A\mathfrak{s} = 0$ ist Kompositum der $\mathfrak{b}_\mu$, also von der Form $\mathfrak{s} = B\mathfrak{u}$, mit eventuell gebrochenem $\mathfrak{u}$.

Die ganzzahlige Spalte $\mathfrak{t}$ sei ein Kompositum mit eventuell gebrochenen Koeffizienten aus den Spalten von X. Wegen $A(XY) = A$ folgt $A(XY\mathfrak{t} - \mathfrak{t}) = 0$, $\mathfrak{t} = X(Y\mathfrak{t}) + \mathfrak{s}$, wo $\mathfrak{s}$ ganzzahlig ist und der Gleichung $A\mathfrak{s} = 0$ genügt, also von der Form $\mathfrak{s} = B\mathfrak{u}$ ist. Wegen $(XY)B = B$ folgt $X(YB\mathfrak{u}) = B\mathfrak{u} = \mathfrak{s}$. Zusammen ergibt sich $\mathfrak{t} = X(Y\mathfrak{t}) + X(Y\mathfrak{s})$, $\mathfrak{t}$ ist Spaltenkompositum mit *ganzen* Koeffizienten von X, gehört also zum Spaltenmodul von X. Dieser enthält demnach mit jeder Spalte auch jede proportionale, sofern sie ganzzahlig ist. Das bedeutet, daß X genau $t = r + s$ Elementarteiler Eins besitzt. Es seien nämlich $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_t$ die Elementarteiler von X, und die Spalten $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t'$ mögen eine Normalbasis des Spaltenmoduls von X bilden derart, daß $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t$ linear unabhängig sind, $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{t-1}$ die Teiler $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{t-1}$, die beiden proportionalen Spalten $\mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t'$ jedoch die Teiler $\mathfrak{e}_t\mathfrak{q}$, $\mathfrak{e}_t\mathfrak{q}'$ mit $\mathfrak{q}' \sim \mathfrak{q}$, $(\mathfrak{q}', \mathfrak{q}) = 1$ besitzen.

Es ist dann

$$\mathfrak{q} \sim \mathfrak{Z}^{-1}(X) \sim \mathfrak{S}(X).$$

Wäre etwa $e_t \neq 1$, so hätte jede zu $\mathfrak{y}_t$ proportionale Spalte des Moduls den Teiler e_t, während nach obigem *jede* zu $\mathfrak{y}_t$ proportionale ganzzahlige Spalte, auch eine solche mit zu e_t primem Teiler, zum Modul gehört.

9. Angenommen es sei $r + s = t \leqq 2$. Durch Anfügung einer Spalte $\mathfrak{y}$ von Unbestimmten y_λ ($\lambda = 1, \ldots, m$) an die Normalbasis $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{y})$ entsteht eine Matrix, deren $(t+1)$-reihigen Unterdeterminanten Linearformen mit dem größten gemeinsamen Koeffiziententeiler 1 sind, und zwar ein Linearformensystem von einem Range $\geqq 2$. Nach St. I, 15 kann man daher für die $\mathfrak{y}_\lambda$ solche ganzen Zahlen aus K setzen, daß der $(t+1)$-te Determinantenteiler von $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{y})$ gleich Eins wird. Wegen der Beziehung $A(XY\mathfrak{y} - \mathfrak{y}) = 0$ ist $\mathfrak{y} - X(Y\mathfrak{y}) = \mathfrak{s}_1$ mit $A\mathfrak{s}_1 = 0$. Die Matrix $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{s}_1)$ hat daher ebenfalls den $(t+1)$-ten Determinantenteiler Eins, denn sie geht aus $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{y})$ durch Addition eines Kompositums der ersten $t+1$ Spalten zur $(t+2)$-ten hervor. Ist $t + 1 \leqq 2$, so kann das eben angewandte Verfahren wiederholt werden, bis eine Matrix $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{p-1})$ von m Spalten vom Range $m-1$ und mit dem $(m-1)$-ten Determinantenteiler 1 entsteht. Es ist $A\mathfrak{s}_1 = \cdots = A\mathfrak{s}_{p-1} = 0$. $\mathfrak{y}$ sei wieder eine Spalte von m Unbestimmten. Die Determinante

$$|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{p-1}, \mathfrak{y}|$$

ist eine Linearform in den y_λ vom größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{q}$. Ist d ein Vielfaches von $\mathfrak{q}$, $(d) = \mathfrak{q}\mathfrak{r}$, so kann man für die y_λ solche durch $\mathfrak{r}$ teilbare ganze Zahlen setzen, daß $|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}| = d$ [5]). Die Ersetzung von $\mathfrak{y}$ durch $\mathfrak{s}_p = \mathfrak{y} - X(Y\mathfrak{y})$ ändert den Determinantenwert $|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p|$ nicht; auch $\mathfrak{s}_p$ hat den größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{r}$. Ist δ eine Zahl mit der Idealdarstellung $(\delta) = \mathfrak{r}'/\mathfrak{r}$, wo $\mathfrak{r}' \sim \mathfrak{r}$, $(\mathfrak{r}', \mathfrak{r}) = 1$, $\mathfrak{s}_p' = \delta\mathfrak{s}_p$, so wird $|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p'| = \delta d$; es ist ebenfalls $A\mathfrak{s}_p' = 0$. Die beiden Determinanten $|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_p', \ldots, \mathfrak{s}_p|$, $|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p'|$ haben als Idealdarstellungen $\mathfrak{q}'\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'$. Da $(\mathfrak{q}\mathfrak{r}, \mathfrak{q}'\mathfrak{r}, \mathfrak{q}\mathfrak{r}', \mathfrak{q}'\mathfrak{r}') = 1$, ist der m-te Determinantenteiler der Matrix

$$(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p, \mathfrak{s}_p')$$

Eins, die Spalten dieser Matrix erzeugen also den Modul aller m-gliedrigen Spalten. Da die Spalten $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t'$ von den Spalten $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p'$ unabhängig sind, hat auch die Matrix $S = (\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p, \mathfrak{s}_p')$ vom Rang p lauter Elementarteiler Eins [6]). Es ist $\mathfrak{r} \sim \mathfrak{Z}^{-1}(S) \sim \mathfrak{S}(S)$. Wegen $\mathfrak{r} \sim \mathfrak{q}^{-1}$ folgt $\mathfrak{Z}(S) \sim \mathfrak{Z}^{-1}(X)$.

Analog kann man $p+1$ Zeilen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_p, \mathfrak{z}_p'$ finden derart, daß $\mathfrak{z}_p$ zu $\mathfrak{z}_p'$ proportional ist, daß die $(p+1, m)$-reihige Matrix Z aus diesen Zeilen vom Rang p ist und lauter Elementarteiler Eins hat und daß die Zeilen von Z und X zusammen den Modul aller m-gliedrigen Zeilen erzeugen. Die $\mathfrak{z}_\nu$ können dabei so normiert werden, daß $\mathfrak{z}_\nu B' = 0$. Es ist $\mathfrak{S}(Z) \sim \mathfrak{S}^{-1}(X)$.

10. Die ganzzahligen Lösungen $\mathfrak{u}$ des Gleichungssystemes $X\mathfrak{u} = 0$ bilden einen Modul vom Range $m - t = p$ mit p Elementarteilern Eins. Die Spalten $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_p, \mathfrak{u}_p'$, zur $(m, p+1)$-reihigen Matrix U zusammengefaßt, mögen eine Normalbasis für diesen

---

[5]) A. a. O. [3]), Hilfssatz 2.

[6]) Die beiden Moduln mit den Basen $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{y}_t')$ und $(\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p, \mathfrak{s}_p)$ sind komplementäre Grundmoduln im Sinne von Krull, a. a. O. [3]), Satz 17.

Modul bilden. Es sei

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}.$$

Der erste Faktor links hat m, der zweite p Elementarteiler Eins. Auf der rechten Seite sind die m ersten Zeilen Null, V ist also $(p+1)$-reihig quadratisch. Nach dem Hilfssatz 1 hat V mindestens $m + p - m = p$ Elementarteiler Eins, und zwar ist V genau vom Range p, da U vom Range p ist. V kann daher durch ganzzahlige $(p+1)$-reihige Faktoren P, Q auf eine Normalform folgender Art gebracht werden

$$(PZ)(UQ) = PVQ = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & a & ab \\ & & & ac & abc \end{pmatrix}.$$

Die ganzen Zahlen a, ab, ac, abc sind relativ prim, es gibt also ganze x, x', y, y' mit

$$ax + abx' + acy + abcy' = 1.$$

b darf so angenommen werden, daß das Ideal (b) der Quotient aus zwei beliebigen relativ primen Idealen der Spaltenklasse $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}(V)$ dieser Matrix ist. Nun ist $\mathfrak{S}(V) \sim \mathfrak{S}(Z)$. Für $\mathfrak{S}(Z)$ ergibt sich aber nach früherem $\mathfrak{S}(Z) \sim \mathfrak{S}^{-1}(X) \sim \mathfrak{Z}(X) \sim \mathfrak{Z}^{-1}(S) \sim \mathfrak{r}$. Daher ist $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{r}$, und es darf $(b) = \mathfrak{r}'/\mathfrak{r}$, $b = \delta$ angenommen werden. Die $p+1$ Zeilen von PZ seien mit $\mathfrak{z}_1^*, \ldots, \mathfrak{z}_p^*, \mathfrak{z}_p'^*$, die $p+1$ Spalten von UQ mit $\mathfrak{u}_1^*, \ldots, \mathfrak{u}_p^*, \mathfrak{u}_p'^*$ bezeichnet. Dann sei

$$X^* = X + \mathfrak{s}_1 \mathfrak{z}_1^* + \cdots + \mathfrak{s}_{p-1} \mathfrak{z}_{p-1}^* + (x \mathfrak{s}_p \mathfrak{z}_p^* + x' \mathfrak{s}_p' \mathfrak{z}_p^* + y \mathfrak{s}_p \mathfrak{z}_p'^* + y' \mathfrak{s}_p' \mathfrak{z}_p'^*).$$

Es ist einerseits $AX^* = AX = A'$, $X^*B' = XB' = B$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} X^* \mathfrak{u}_\nu^* &= X \mathfrak{u}_\nu^* + \mathfrak{s}_\nu = \mathfrak{s}_\nu && (\nu = 1, \ldots, p-1) \\ X^* \mathfrak{u}_p^* &= X \mathfrak{u}_p^* + \mathfrak{s}_p(xa + yac) + \mathfrak{s}_p'(x'a + y'ac) \\ &= \mathfrak{s}_p(ax + acy + a\delta x' + ac\delta y') = \mathfrak{s}_p \\ X^* \mathfrak{u}_p'^* &= X \mathfrak{u}_p'^* + \mathfrak{s}_p(xab + yabc) + \mathfrak{s}_p'(x'ab + y'abc) \\ &= \mathfrak{s}_p'(ax + acy + abx' + abcy') = \mathfrak{s}_p'. \end{aligned}$$

Daher enthält der Spaltenmodul von X^* die Spalten $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p, \mathfrak{s}_p'$. Er enthält also, nach der Definition von X^*, auch die Spalten von X, er ist also der Modul aller m-gliedrigen ganzzahligen Spalten, d. h. X^* ist unimodular. Wir setzen daher weiterhin X in Gleichung (7a) als unimodular voraus und können dann Y durch X^{-1} ersetzen.

11. Die Determinante $|X|$ ist eine Einheit des Körpers K. Sie soll jetzt soweit wie möglich normiert werden. Sei zunächst $p = 0$. Dann ist $A^{(r)} \neq 0$, $B^{\langle s \rangle} \neq 0$, und die Zeilen der beiden Matrizen sind nach T. Nr. **2** proportional, soweit sie nicht Null sind. Die Gesamtheit der Proportionalitätsfaktoren zwischen je einer Zeile von $A^{(r)}$ und einer Zeile von $B^{\langle s \rangle}$ sei kurz mit $A^{(r)} : B^{\langle s \rangle}$ bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned} A'^{(r)} : B'^{\langle s \rangle} &= (AX)^{(r)} : (X^{-1}B)^{\langle s \rangle} = A^{(r)} X^{(r)} : B^{\langle s \rangle} |X|^{-1} X^{(r)} \\ &= |X| \, (A^{(r)} : B^{\langle s \rangle}) \end{aligned}$$

nach den Regeln über das Rechnen mit abgeleiteten adjungierten Matrizen, insbesondere nach dem Satz von Jacobi und wegen $m = r + s$ (vgl. T. Nr. **1**). $|X|$ ist also durch A, B und A', B' festgelegt.

Sei nun $p > 0$. Ist dann ε eine beliebige Einheit aus K und ersetzt man in dem vorhergehenden Beweis $\mathfrak{s}_p$ und $\mathfrak{s}_p'$ durch $\varepsilon\mathfrak{s}_p$ und $\varepsilon\mathfrak{s}_p'$, so bleiben alle Überlegungen gültig. Die Berechnung der Determinante $|X|$ aus der Summendarstellung

$$X^* = (X + \cdots + \mathfrak{s}_{p-1}\mathfrak{z}_{p-1}^*) + \varepsilon(x\mathfrak{s}_p\mathfrak{z}_p^* + \cdots + y'\mathfrak{s}_p'\mathfrak{z}_p'^*)$$

zeigt aber, wenn man beachtet, daß die Determinante der ersten Klammer Null ist, daß der neue Wert sich von dem alten um den Faktor ε unterscheidet. Im Falle $p > 0$ darf demnach die Matrix X in (7a) als 1-Matrix angenommen werden.

§ 4. Vollständigkeit und Unabhängigkeit des Invariantensystems.

12. R_k und R_k' $(k = n-1, \ldots, 0)$ seien zwei Systeme von Berandungsmatrizen aus K, welche in den Invarianten von § 1 übereinstimmen. Es soll gezeigt werden, daß R_k und R_k' durch geeignete Erweiterung und Transformation in einander übergehen.

Zunächst mögen beide Systeme so erweitert werden, daß für jedes k die Ränge r_k, r_k' entsprechender Berandungsmatrizen R_k, R_k' gleich werden. Dann sind auch die Zeilenzahlen $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+1}'$ von R_k und R_k' gleich, ebenso die Spaltenzahlen α_k, α_k', denn sie bestimmen sich eindeutig aus den r_k und p_k auf Grund der Formeln für die Bettischen Zahlen in § 1. Im Falle $n = 1$ enthält dann § 2 bereits das Resultat. Denn R_k und R_k' stimmen überein im Rang, den Elementarteilern, der Spalten- und der Zeilenklasse und im Falle $r_0 = \alpha_1 = \alpha_0$ in der Torsion, welche in diesem Falle mit der Determinante identisch ist. Wenn $n > 1$, mögen die R_k und R_k' nochmals so erweitert werden, daß alle $r_k = r_k' > 0$. Nach den Formeln für die Bettischen Zahlen ergibt sich dann, daß für $k = n-2, \ldots, 1$ der Rang r_k jeder Matrix R_k kleiner ist als ihre Zeilenzahl α_{k+1} und als ihre Spaltenzahl α_k und daß für R_{n-1} und R_0 jedenfalls $r_{n-1} < \alpha_{n-1}$, $r_0 < \alpha_1$. Deshalb gelten nach § 2 für jedes k Gleichungen $R_k' = P_k R_k Q_k$ mit 1-Matrizen P_k, Q_k.

13. Es seien zunächst alle $p_k = 0$. Für Q_0 sei T_0 gesetzt. In den beiden Gleichungen $R_1' = (P_1 R_1) Q_1$, $R_0' = P_0(R_0 T_0)$ darf man nach § 3 Q_1 durch eine unimodulare Matrix T_1 und gleichzeitig P_0 durch T_1^{-1} ersetzen. $|T_1|$ berechnet sich wie in Nr. **11** aus

$$R_1'^{(r_1)} : R_0'^{\langle r_0\rangle} = |T_1|\,((P_1 R_1)^{(r_1)} : (R_0 T_0)^{\langle r_0\rangle}) .$$

Wenn $n > 2$, so ist der Rang r_1 von $P_1 R_1$ kleiner als die Zeilenzahl α_2, man kann also nach Nr. **4** durch passende Wahl von P_1 und Q_1 erreichen, daß $(P_1 R_1)^{(r_1)}$ eine beliebig vorgegebene Einheit als Faktor bekommt. Das geschehe in der Weise, daß $|T_1| = 1$ wird. Wenn $n > 3$, so kann man mit den beiden Gleichungen $R_2' = P_2 R_2 Q_2$, $R_1' = P_1 R_1 T_1$ entsprechend verfahren. Man erhält so eine Reihe von 1-Matrizen $T_0, T_1, \ldots$ und entsprechende Transformationsgleichungen, zuletzt $R_{n-2}' = P_{n-2} R_{n-2} T_{n-2}$. Nimmt man die Gleichung $R_{n-1}' = P_{n-1} R_{n-1} Q_{n-1}$ hinzu, so darf man nach § 3 Q_{n-1} durch eine unimodulare Matrix T_{n-1} und gleichzeitig P_{n-2} durch T_{n-1}^{-1} ersetzen. Für die 1-Matrix P_{n-1} sei T_n^{-1} gesetzt. $|T_{n-1}|$ läßt sich wie folgt bestimmen: Ist T die Torsion für das System der R_k, so ergibt sich daraus die Torsion für das System der $T_{k+1}^{-1} R_k T_k$ nach T. Nr. **5** zu $|T_{n-1}|\,\mathsf{T}$. Da beide Werte nach Voraussetzung gleich sind, folgt $|T_{n-1}| = 1$. Damit ist in diesem Falle die Behauptung bewiesen.

Seien nun nicht alle $p_k = 0$, und sei p_l die Bettische Zahl mit dem kleinsten Index l und $p_l > 0$. Wenn $l = n$, so führt das oben für $R_0', R_1', \ldots, R_{n-2}'$ angewandte Verfahren ohne weiteres zum Ziel. Im allgemeinen Fall erhält man durch dies Verfahren jedenfalls Transformationsmatrizen $T_0, \ldots, T_{l-1}$ mit der Determinante 1 der gewünschten Art. In ganz analoger Weise kann man, von R_{n-1}' zu R_{n-2}' usf. absteigend, Trans-

formationsmatrizen $T_n, \ldots, T_{l+1}$ der gewünschten Art erhalten und gelangt so zu den Gleichungen

$$R_l' = T_{l+1}^{-1} R_l Q_l, \quad R_{l-1}' = P_{l-1} R_{l-1}' T_{l-1} .$$

Hierin kann man Q_l durch eine unimodulare Matrix T_l und gleichzeitig P_{l-1} durch T_l^{-1} ersetzen. Da $p_l > 0$, darf man T_l sogar als 1-Matrix annehmen. Damit ist die Vollständigkeit des Invariantensystemes gezeigt.

14. Mit Hilfe der Elementarteilertheorie kann man leicht Systeme von Berandungsmatrizen aus K angeben, welche vorgegebene Bettische Zahlen, Torsionsideale und Torsionsklassen besitzen, sofern diese Invarianten die Abhängigkeiten von Nr. 2 erfüllen. Werden lauter Bettische Zahlen Null vorgeschrieben, so kann man die Torsion dadurch um eine beliebige Einheit ε als Faktor verändern, daß man eine beliebige der $\alpha_n = r_{n-1}$ Zeilen von R_{n-1} mit ε multipliziert. Dabei erhält $R_{n-1}^{(r_n-1)}$ und damit T den Faktor ε. Die aufgestellten Invarianten sind also innerhalb der angegebenen Bedingungen unabhängig.

§ 5. Duale Überdeckungen.

15. Der soeben betrachteten Überdeckung $\mathfrak{U}$ eines topologischen Komplexes mit dem Ganzzahligkeitsbereich eines algebraischen Zahlkörpers K sei jetzt die dazu duale Überdeckung $\mathfrak{U}^*$ desselben Komplexes mit dem Ganzzahligkeitsbereich des konjugiert komplexen Körpers $\overline{\mathsf{K}}$ gegenübergestellt[7]). $\mathfrak{U}^*$ ist definiert durch die Berandungsmatrizen $R_k^* = \overline{R}_{n-1-k}'$; der Querstrich bezeichnet die konjugiert komplexen Zahlen, der senkrechte Strich die Spiegelung der Matrix an der Hauptdiagonale. Es sollen die Beziehungen von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ festgestellt werden.

Für die Bettischen Zahlen gilt

$$p_k^* = \alpha_k^* - r_{k-1}^* - r_k^* = \alpha_{n-k} - r_{n-k} - r_{n-1-k} = p_{n-k} \qquad (k = n, \ldots, 1). \tag{9}$$

$[\mathfrak{e}_k]$ bzw. $[\mathfrak{e}_k^*]$ bezeichne das System der k-dimensionalen Torsionsideale von $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}^*$. Dann folgt aus der Definition der R_k^* ohne weiteres

$$[\mathfrak{e}_k^*] = [\bar{\mathfrak{e}}_{n-1-k}] \qquad (k = n-1, \ldots, 0), \tag{10}$$

ebenso für die Torsionsklassen

$$\mathfrak{S}_k^* = \overline{\mathfrak{Z}}_{n-1-k}, \quad \mathfrak{Z}_k^* = \overline{\mathfrak{S}}_{n-1-k} \qquad (k = n-1, \ldots, 0). \tag{11}$$

Die Torsionsklassen lassen sich auch durch die Homologiegruppen der Überdeckung beschreiben: Jede Operatorgruppe mit dem Ganzzahligkeitsbereich von K als Operatorenbereich mit endlich vielen Erzeugenden ist eindeutig charakterisiert durch ihren Rang, ihre Elementarteiler und ihre Idealklasse. Letztere ist definiert als die Zeilenklasse des Relationenmoduls für ein beliebiges endliches Erzeugendensystem. Der Rang der k-dimensionalen Homologiegruppe $\mathfrak{H}_k$ ist p_k; ihre Torsionsideale sind das System $[\mathfrak{e}_k]$, für $k = n$ fehlen sie; als Idealklasse $\mathfrak{C}_k$ von $\mathfrak{H}_k$ erkennt man leicht die Klasse $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{Z}_k \mathfrak{S}_{k-1}^{-1}$. Dabei ist $\mathfrak{Z}_n \sim \mathfrak{S}_{-1} \sim 1$ zu setzen.

Auf Grund der in Nr. 2 aufgestellten Abhängigkeiten kann man mit Hilfe der Torsionsideale auch umgekehrt die $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{Z}_k$ durch die $\mathfrak{C}_k$ ausdrücken. Man kann also auch die $\mathfrak{C}_k$ an Stelle der $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{Z}_k$ zur Charakterisierung von $\mathfrak{U}$ verwenden. Für $\mathfrak{C}_k^*$ ergibt

---

[7]) Vgl. a. a. O. [1]), § 5.

sich $\bar{\mathfrak{S}}_{n-1-k}\bar{\mathfrak{Z}}_{n-k}^{-1}$, also

$$(11') \qquad \mathfrak{C}_k^* = \bar{\mathfrak{C}}_{n-1}^{-1} \qquad (k = n, \ldots, 0).$$

Sind alle Bettischen Zahlen von $\mathfrak{U}$ Null, so gilt das gleiche für $\mathfrak{U}^*$. Für die Torsion T^* von $\mathfrak{U}^*$ folgt dann nach der Definition der Torsion

$$(12) \qquad \mathsf{T}^*\bar{\mathsf{T}} = 1, \text{ wenn } n \text{ gerade}, \qquad \mathsf{T}^* = \bar{\mathsf{T}}, \text{ wenn } n \text{ ungerade}.$$

Diese Gleichungen gelten jedoch nur bis auf Faktoren aus $\mathfrak{T}$ bzw. $\bar{\mathfrak{T}}$.

16. Es sei noch der Spezialfall betrachtet, daß $\bar{\mathsf{K}} = \mathsf{K}$ und daß $\mathfrak{U}^*$ mit $\mathfrak{U}$ äquivalent ist, d. h. daß $\mathfrak{U}^*$ aus $\mathfrak{U}$ durch Erweiterung und Transformation hervorgeht. Solche Überdeckungen treten auf Grund des Dualitätsprinzip bei den Homotopiekettenringen von Mannigfaltigkeiten auf. In diesem Fall stimmen die Invarianten von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ überein. Die abgeleiteten Beziehungen (9)—(12) gehen dann über in die folgenden:

$$p_k = p_{n-k} \qquad (k = n, \ldots, 0),$$
$$[\mathfrak{e}_k] = [\bar{\mathfrak{e}}_{n-1-k}] \qquad (k = n-1, \ldots, 0),$$
$$\mathfrak{S}_k = \bar{\mathfrak{Z}}_{n-1-k}, \quad \mathfrak{Z}_k = \bar{\mathfrak{S}}_{n-1-k} \qquad (k = n-1, \ldots, 0),$$
$$\mathsf{T}\bar{\mathsf{T}} = 1 \text{ bei geradem } n, \qquad \mathsf{T} = \bar{\mathsf{T}} \text{ bei ungeradem } n,$$

bis auf Faktoren aus $\mathfrak{T}$ und $\bar{\mathfrak{T}}$.

Diese Gleichungen sind Verallgemeinerungen der Poincaréschen Dualitätsbeziehungen für orientierbare Mannigfaltigkeiten.

Eingegangen 27. Juli 1936.